THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY UNIVERSITÉ DE PARIS XI

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

CLAUDE JOURON

1ère Thèse : - *Analyse théorique et numérique de quelques problèmes d'optimisation intervenant en théorie des structures.*

- *Résolution numérique du problème des surfaces minima.*

2ème Thèse : *Théorie de la complexité : le problème $P \sim NP$.*

Soutenues le 2 Décembre 1976 devant la Commission d'examen

MM. J. CERF — Président

J. CEA
L. TARTAR
R. TEMAM
J. VUILLEMIN
— Examinateurs

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548102_0019

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY UNIVERSITÉ DE PARIS XI

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

CLAUDE JOURON

lere Thèse : - *Analyse théorique et numérique de quelques problèmes d'optimisation intervenant en théorie des structures.*

- *Résolution numérique du problème des surfaces minima.*

2ème Thèse : *Théorie de la complexité : le problème $P \sim NP$.*

Soutenues le 2 Décembre 1976 devant la Commission d'examen

MM. J. CERF — Président

J. CEA
L. TARTAR
R. TEMAM
J. VUILLEMIN
— Examinateurs

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Je suis tout particulièrement reconnaissant à R. TEMAM pour ses encouragements et ses conseils amicaux qui m'ont permis de mener à bien ce travail.

Je tiens à remercier Monsieur J. CERF, qui m'a orienté vers l'Université et qui me fait aujourd'hui l'honneur de présider le Jury, ainsi qu'à Messieurs J. CEA et L. TARTAR qui ont accepté de faire partie du Jury.

Je remercie également Monsieur J. VUILLEMIN pour m'avoir proposé comme second sujet un thème non seulement important en Informatique théorique mais également dans d'autres branches des Mathématiques.

Mes remerciements vont aussi à Mesdames MAYNARD, LAUNAY et ZIELINSKI qui ont assuré avec compétence et diligence la réalisati matérielle de ce texte.

N° 210-76-62

ANALYSE THEORIQUE ET NUMERIQUE DE QUELQUES PROBLEMES D'OPTIMISATION INTERVENANT EN THEORIE DES STRUCTURES

CLAUDE JOURON

Publication Mathématique d'Orsay

TABLE DES MATIERES

I - INTRODUCTION. I.1

II - ETUDE DU PROBLEME SPECTRAL.

1. Enoncé du problème spectral. II.1
2. Continuité de $\lambda(u)$ et $w(u)$. II.4
3. Dérivabilité de $\lambda(u)$ et $w(u)$. II.8
4. Pseudo-concavité et Faible * semi-continuité supérieure de $\lambda(u)$. II.12
5. Exemples. II.16

III - OPTIMISATION EN THEORIE DES STRUCTURES.

1. Fonctions pseudoconvexes et quasiconvexes. III.1
2. Formulation des problèmes. III.3
3. Etude du problème $\mathcal{P}_o$. III.6
4. Etude du problème $\mathcal{R}_o$. III.11
5. Etude des problèmes : cadre abstrait. III.12
6. Etude des problèmes $\mathcal{P}_{\alpha,\beta}$. III.21
7. Etude des problèmes $\mathcal{R}_{\alpha,\beta}$. III.31

IV - DISCRETISATION DES PROBLEMES PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS.

1. Approximation des espaces. IV.1
2. Approximation du problème spectral. IV.4
3. Approximation du problème $\mathcal{P}_{\alpha,\beta}$. IV.11
4. Résolution du problème discrétisé. IV.17
5. Résultats numériques. IV.20

BIBLIOGRAPHIE.

I - INTRODUCTION.

Nous avons tenté dans ce travail de traiter deux types de problèmes se posant en optimisation des structures. Dans les deux cas la variable de contrôle est l'épaisseur de la structure et la fréquence fondamentale de vibration joue un rôle très important.

Le premier type de problème peut s'énoncer ainsi : minimiser le poids d'une structure tout en gardant la fréquence fondamentale de vibration identique à celle d'une structure d'épaisseur uniforme. Les travaux sur ce sujet sont nombreux, citons [18], [26], [1], [2], [8], [9], [24], [29] . On trouvera dans [2] une bibliographie assez complète.

Le deuxième type de problème est en quelque sorte le problème dual : maximiser la première fréquence de vibration d'une structure tout en gardant son poids constant. Citons ici les travaux de [11], [16], [22], [23], [24], [17]. Le lien entre les deux problèmes dans le cas d'une barre étant fait dans [22].

Nous ne considérerons ici que les cas où la valeur propre est celle d'un opérateur elliptique du second ordre, le principe du maximum jouant un rôle très important.

Indiquons maintenant brièvement le plan de cette étude et les résultats obtenus.

Nous avons au cours du Chapitre I étudié les propriétés de la fréquence fondamentale de vibration. Si u est la fonction représentant l'épaisseur de la structure et si $\lambda(u)$ est la première valeur propre du problème spectral considéré, nous avons montré en particulier que la fonction :

$$u \longrightarrow \lambda(u)$$

était différentiable dans $L^{\infty}(\Omega)$ [Ω étant la forme de la structure] et quasi-concave.

Dans le Chapitre III nous avons tout d'abord décrit, dans un cadre fonctionnel qui nous a semblé naturel, les deux types de problèmes indiqués auparavant, puis nous avons étudié ces problèmes. Nous avons montré, dans le cas où il n'y a

aucune contrainte sur l'épaisseur ou une contrainte portant sur l'épaisseur minimale de la structure, que les problèmes admettaient des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité. Dans le cas où l'épaisseur de la structure est comprise entre deux valeurs fixes, nous avons obtenu, en plus de ces conditions, des théorèmes d'existence.

Le Chapitre IV traite de l'approximation de ces problèmes par la méthode des éléments finis. Nous avons montré, seulement dans certains cas, la convergence en un sens faible d'une solution du problème approché vers une solution du problème continu. La méthode dite du lagrangien augmenté a été utilisée pour résoudre le problème approché.

Je tiens à remercier ici R. TEMAM pour les conseils et encouragements qu'il m'a prodigués pendant ce travail, ainsi que les membres de l'Equipe d'Analyse Numérique d'Orsay avec qui j'ai eu de nombreuses et fructueuses discussions.

-:-

II - ETUDE DU PROBLEME SPECTRAL.

1 - ENONCE DU PROBLEME SPECTRAL.

Soit Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ lipschitzienne. On désigne par $(.,.)$ [resp. $((.,.))$] le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ [resp. $H_o^1(\Omega)$] , par $\|.\|_o$ [resp. $\|.\|$] la norme de $L^2(\Omega)$ [resp. $H_o^1(\Omega)$] , par $<.,.>$ le crochet de dualité entre $H_o^1(\Omega)$ et son dual $H^{-1}(\Omega)$ et par $|\ |_\infty$ la norme de $L^\infty(\Omega)$.

On considère deux fonctions a et b définies sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $L^\infty(\Omega)$ à valeurs dans l'ouvert $\mathcal{U}$ de $L^\infty(\Omega)$ défini par

$$\mathcal{U} = \{u \in L^\infty(\Omega) \ ; \ \exists\ \alpha(u) \in \mathbb{R} \text{ tel que } u(x) \geqslant \alpha(u) > 0 \text{ p.p.}\} \ . \tag{1.1}$$

Pour $(w,\phi) \in (H_o^1(\Omega))^2$, $u \in \mathcal{O}$ on pose :

$$a_u(w,\phi) = \int_\Omega a(u)(x)\ \text{grad}\ w(x) \cdot \text{grad}\ \phi(x)\ dx \ . \tag{1.2}$$

On a

$$\alpha(a(u))\|w\|^2 \leqslant a_u(w,w) \leqslant |a(u)|_\infty \|w\|^2 \ . \tag{1.3}$$

La forme bilinéaire continue coercive a_u définit un isomorphisme A_u de $H_o^1(\Omega)$ sur H^{-1} :

$$<A_u w,\phi> = a_u(w,\phi) \quad \forall\ (w,\phi) \in H_o^1(\Omega)^2 \ . \tag{1.4}$$

A_u peut être considéré comme opérateur de $L^2(\Omega)$ dont le domaine est :

$$\mathcal{D}_u = \{w \in H_o^1(\Omega) \ ; \ A_u w \in L^2(\Omega)\} \ .$$

On appellera G_u l'opérateur réciproque de A_u .

Pour $w \in L^2(\Omega)$, $u \in \mathcal{O}$ on pose

(1.5) $$B_u w = b(u) \in L^2(\Omega) \ .$$

On a

(1.6) $$\alpha(b(u))\|w\|_o^2 \leq (B_u w, w) \leq |b(u)|_\infty \|w\|_o^2 \ .$$

On va s'intéresser au problème spectral

(1.7) $$A_u w = \lambda B_u w \ .$$

Le problème est un problème classique de valeurs propres. On sait, cf. KATO [10] et MIKLIN [15] que son spectre est composé d'un ensemble dénombrable

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n \leq \ldots$$

$$\lambda_n \longrightarrow +\infty \quad \text{quand} \quad n \longrightarrow \infty \ ,$$

de plus

(1.8) $$\lambda_1 = \inf_{\substack{w \in H_o^1(\Omega) \\ w \neq o}} \frac{<A_u w, w>}{(B_u w, w)} = \frac{<A_u w_1, w_1>}{(B_u w_1, w_1)}$$

où w_1 est un vecteur propre associé à λ_1 et les sous-espaces propres associés à deux valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

Remarquons également que le problème (1.7) est équivalent à

(1.9) $$(\frac{1}{\lambda} I - G_u B_u) w = 0 \ .$$

Soit w_1 un vecteur propre associé à λ_1 . On désigne par $|w_1|$ la fonction

$$x \longrightarrow |w_1(x)|$$

$|w_1|$ est un vecteur propre de (1.7) associé à λ_1 car $|w_1| \in H_o^1(\Omega)$ cf. STAMPACHIA [20],

$$<A_u |w_1|, |w_1|> = <A_u w_1, w_1>$$

$$(B_u |w_1|, |w_1|) = (B_u w_1, w_1) \ .$$

Posons

(1.10) $$\lambda(u) = \lambda_1$$

(1.11) $$w(u) = \frac{|w_1|}{\| |w_1| \|_o} \cdot$$

Lemme 1.1.

(1.12) $$w(u;x) > 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega$$

(1.13) $\lambda(u)$ est une valeur propre simple de (1.7).

Démonstration : Le principe fort du maximum STAMPACCHIA [20] appliqué à l'opérateur $A_u - \lambda_u B_u$ montre que $w(u;x) > 0$ p.p. dans Ω . Pour montrer que $\lambda(u)$ est une valeur propre simple de (1.7) on va faire le raisonnement classique suivant :

Soit v un second vecteur propre associé à $\lambda(u)$, on peut supposer que v est orthogonal à w et donc d'après (1.12)

(1.14) $$v^+ \neq 0 \quad \text{et} \quad v^- \neq 0$$

$|v|$ est également un vecteur propre associé à $\lambda(u)$

$$G_u B_u(|v|) = \frac{1}{\lambda(u)} |v| = |G_u B_u v|$$

c'est-à-dire

(1.15) $$G_u B_u v^+ + G_u B_u v^- = |G_u B_u v^+ - G_u B_u v^-|$$

puisque $|v| = v^+ + v^-$ et $v = v^+ - v^-$.

Comme $B_u(L^2_+) \subset L^2_+$ $G_u(L^2_+) \subset L^2_+$ l'égalité (1.15) implique

$$v^+ = 0 \quad \text{ou} \quad v^- = 0$$

ce qui est en contradiction avec (1.14). ∎

On vient donc de montrer la

Proposition 1.1.

Il existe un et un seul couple $(\lambda(u),w(u)) \in \mathbb{R} \times H_o^1(\Omega)$ tel que

(1.16) $$A_u\, w(u) - \lambda(u)\, B_u\, w(u) = 0$$

(1.17) $$w(u;x) \geqslant 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega$$

(1.18) $$\|w(u)\|_o = 1 \ .$$

De plus $(\lambda(u),w(u))$ vérifie (1.10), (1.12), (1.13) et (1.8).

Cette dernière relation s'écrit, compte tenu des notations :

(1.19) $$\lambda(u) = \frac{<A_u\, w(u),w(u)>}{(B_u\, w(u),w(u))} = \inf_{\substack{w\in H_o^1(\Omega)\\ w\neq o}} \frac{<A_u\, w,w>}{(B_u w,w)} \ .$$

L'unicité est évidente car si (λ_j,w_j) vérifie (1.7) alors $w_j \perp w(u)$ et donc on ne peut avoir $w_j(x) \geqslant 0$ p.p. et $w_j \neq 0$.

2 - CONTINUITE DE $\lambda(u)$ ET $w(u)$.

On va considérer tout d'abord la topologie forte de $L^\infty(\Omega)$.

Proposition 2.1.

On suppose que les applications

(2.1) $$u \longrightarrow a(u) \quad \text{et} \quad u \longrightarrow b(u) \quad \text{sont continues dans } \mathcal{O}$$

alors les applications

$$u \in \mathcal{O} \longrightarrow \lambda(u) \in \mathbb{R}$$

$$u \in \mathcal{O} \longrightarrow w(u) \in H_o^1(\Omega)$$

sont continues dans $\mathcal{O}$.

Démonstration : Soit $u_n \in \mathcal{O}$ tel que $u_n \longrightarrow u_o \in \mathcal{O} \subset L^\infty(\Omega)$.

On notera (λ_n,w_n) le couple $(\lambda(u_n),w(u_n))$ et α_o [resp. β_o] le scalaire

$(\alpha(a(u_o))$ [resp. $\alpha(b(u_o))$] . D'après (2.1) pour n assez grand on a

$$\alpha(a(u_n)) \geqslant \frac{\alpha_o}{2} > 0 \ , \tag{2.2}$$

$$\alpha(b(u_n)) \geqslant \frac{\beta_o}{2} > 0 \ . \tag{2.3}$$

Soit $w \in H_o^1(\Omega)$ fixé. On a d'après (1.19), (1.4), (1.3), (1.6), (2.3), (2.2)

$$\lambda_n = \lambda(u_n) \leqslant \frac{2|a(u_n)|_\infty \|w\|^2}{\beta_o \|w\|_o^2} \tag{2.4}$$

et

$$\frac{\alpha_o}{2} \|w_n\|^2 \leqslant \lambda_n |b(u_n)|_\infty \|w_n\|_o^2 \ . \tag{2.5}$$

Or $a(u_n)$ et $b(u_n)$ sont bornées dans $L^\infty(\Omega)$ et par conséquent on déduit de (2.4) puis de (2.5) les majorations

$$\lambda_n \leqslant c^{ste} \ ,$$

$$\|w_n\| \leqslant c^{ste} \ .$$

On peut donc, des suites (λ_n) et (w_n), extraire des sous-suites, toujours notées (λ_n) (w_n) , telles que

$$\lambda_n \longrightarrow \lambda_* \quad \text{dans } \mathbb{R} \ , \tag{2.6}$$

$$w_n \longrightarrow w_* \quad \text{dans } H_o^1(\Omega) \text{ faible et dans } L^2(\Omega) \text{ fort,} \tag{2.7}$$

$$w_n(x) \longrightarrow w_*(x) \quad \text{p.p. dans } \Omega \ . \tag{2.8}$$

Le couple (λ_n, w_n) vérifie (1.16) pour $u = u_n$ c'est-à-dire :

$$\int_\Omega a(u_n)(x) \nabla w_n(x).\nabla w(x) \, dx = \lambda_n \int_\Omega b(u_n)(x) \, w_n(x) \, w(x) \, dx \quad \forall w \in H_o^1(\Omega) \ . \tag{2.9}$$

On passe à la limite dans l'équation (2.9) :

$$\int_\Omega a(u_o)(x) \nabla w_*(x).\nabla w(x) \, dx = \lambda_* \int_\Omega b(u_o)(x) \, w_*(x) \, w(x) \, dx \quad \forall w \in H_o^1(\Omega) \ . \tag{2.10}$$

Par conséquent (λ_*, w_*) vérifie (1.16) pour $u = u_o$.

De plus, comme w_n vérifie (1.17), (1.18) et que l'on a (2.7), (2.8), w_* vérifie également (1.17), (1.18). La Proposition 1.1 permet alors d'affirmer que

$$w_* = w(u_o)$$

$$\lambda_* = \lambda(u_o)$$

et l'unicité de $(\lambda(u_o), w(u_o))$ implique que ce sont les suites tout entières qui convergent vers $(\lambda(u_o), w(u_o))$.

On doit maintenant démontrer que

$$w_n \longrightarrow w(u_o) = w_o \quad \text{dans} \quad H_o^1(\Omega) \quad \text{fort.} \tag{2.11}$$

Calculons

$$E_n = \int_\Omega a(u_n)(x) \left|\nabla(w_n(x) - w_o(x))\right|^2 dx$$

$$E_n = \int_\Omega a(u_n)(x) \left|\nabla w_n(x)\right|^2 dx + \int_\Omega a(u_n) \left|\nabla w_o(x)\right|^2 dx - 2\int_\Omega a(u_n)\ \nabla w_n(x).\nabla w_o(x)\ dx .$$

Or l'on a d'après (2.9) et (1.19)

$$\int_\Omega a(u_n)(x) \left|\nabla w_n(x)\right|^2 dx = \lambda_n \int_\Omega b(u_n)(x)\ w_n^2(x)\ dx ,$$

$$\int_\Omega a(u_n)(x)\ \nabla w_n(x).\nabla w_o(x)\ dx = \lambda_n \int_\Omega b(u_n)(x)\ w_n(x)\ w_o(x)\ dx ,$$

$$\int_\Omega a(u_o)(x) \left|\nabla w_o(x)\right|^2 dx = \lambda_o \int_\Omega b(u_o)(x)\ w_o^2(x)\ dx .$$

D'où la nouvelle expression de E_n :

$$E_n = E_{1,n} + E_{2,n} + E_{3,n}$$

où

$$E_{1,n} = \int_\Omega (a(u_n) - a(u_o))(x) \left|\nabla w_o(x)\right|^2 dx ,$$

$$E_{2,n} = \lambda_n \int_\Omega b(u_n)(x)\ w_n(x)(w_n(x) - w_o(x))\ dx ,$$

$$E_{3,n} = \int_\Omega (\lambda_o\, b(u_o)(x)\, w_o(x) - \lambda_n\, b(u_n)(x)\, w_n(x))\, w_o(x)\, dx\ .$$

On peut maintenant passer à la limite et constater que chacun des termes $E_{i,n}$ $i = 1, 2, 3$ tend vers zéro et donc

$$E_n \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad n \longrightarrow \infty\ .$$

D'après (1.3), (2.2) on a, pour n assez grand

$$\frac{\alpha_o}{2} \|w_n - w_o\|^2 \leqslant E_n$$

ce qui démontre (2.11). ∎

On va maintenant munir L^∞ de la topologie faible * c'est-à-dire $\sigma(L^\infty, L^1)$. On notera cet espace topologique L^∞_σ.

Si l'on suppose a et b continues de L^∞_σ dans L^∞_σ on n'est pas assuré d'avoir (2.2) et l'on ne peut passer à la limite dans (2.9). Par suite on ne peut affirmer que les fonctions $\lambda(u)$ et $w(u)$ sont continues pour la topologie $\sigma(L^\infty, L^1)$.

Par contre si l'on suppose a indépendant de u et b continue de L^∞_σ dans L^∞_σ alors, si (u_n) est une suite de $L^\infty(\Omega)$ telle que

$$u_n \longrightarrow u_o \quad \text{quand} \quad n \longrightarrow \infty\ ,$$

la démonstration précédente montre que

$$\lambda_n \longrightarrow \lambda_o \quad \text{dans } \mathbb{R}$$

$$w_n \longrightarrow w_o \quad \text{dans } H^1_o(\Omega) \quad \text{fort.}$$

D'où la

Proposition 2.2. On suppose que

$$a(u) = u_1, \quad \forall\, u \in \mathcal{O} \tag{2.12}$$

$$u \longrightarrow b(u) \ \text{est séquentiellement continue de } L^\infty_\sigma \ \text{dans } L^\infty_\sigma \tag{2.13}$$

alors les applications $\lambda(u)$ et $w(u)$ sont séquentiellement continues pour la topologie $\sigma(L^\infty, L^1)$.

Remarque 2.1. Le seul esemple où l'on appliquera cette proposition est le cas où b est affine.

Remarque 2.2. On verra dans la section 4 que, sous certaines hypothèses sur a et b , $\lambda(u)$ est faible * semi-continue supérieurement.

3 - DERIVIBALITE DE $\lambda(u)$ ET $w(u)$.

On considère les fonctions

$$u \in \mathcal{O} \longrightarrow \lambda(u) \in \mathbb{R}$$

$$u \in \mathcal{O} \longrightarrow w(u) \in H_o^1(\Omega) \cap S_1$$

où

$$S_1 = \{v \in L^2(\Omega) \; ; \; \|v\|_o = 1\} .$$

On va supposer que

(3.1) a et b sont continument différentiables de $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{U}$

et l'on va montrer, comme dans MIGNOT [13], que les fonctions $\lambda(u)$ et $w(u)$ sont différentiables.

Considérons la fonction F de

$$\mathcal{O} \times H_o^1(\Omega) \times \mathbb{R} \quad \text{dans} \quad H^{-1}$$

définie par

(3.2) $$F(u,w,\lambda) = A_u w - \lambda B_u w = \operatorname{div}(a(u) \nabla w) - \lambda b(u) w .$$

Soit $u_o \in \mathcal{O}$ posons :

$$w_o = w(u_o) , \; \lambda_o = \lambda(u_o) , \; A_o = Au_o , \; B_o = Bu_o .$$

Calculons les dérivées partielles de F par rapport à u, w, λ au point (u_o, w_o, λ_o)

$$(3.3) \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial w}\right)_o : w \in H_o^1(\Omega) \longrightarrow A_o w - \lambda_o B_o w \in H^{-1}(\Omega) ,$$

$$(3.4) \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right)_o : \lambda \in \mathbb{R} \longrightarrow -\lambda B_o w_o \in L^2(\Omega) ,$$

$$(3.5) \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_o : h \in L^\infty(\Omega) \longrightarrow A_{a'(u_o).h} w_o - \lambda_o B_{b'(u_o).h} w_o .$$

Par conséquent F est continument différentiable sur $\mathcal{O}$.

Posons

$$Y = (w, \lambda) .$$

Lemme 3.1. $\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)_o$ est un isomorphisme de $\mathbb{R} \times (H_o^1 \cap w_o^\perp)$ sur H^{-1} où $\perp$ désigne l'orthogonalité par rapport au produit scalaire de $L^2(\Omega)$.

Démonstration : On a

$$\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)_o (\lambda, w) = \left(\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right)_o \lambda + \left(\frac{\partial F}{\partial w}\right)_o w .$$

D'après (3.4) $\left(\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right)_o$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R} B_o w_o$ et, si l'on admet pour l'instant que

$$(3.6) \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial w}\right)_o \text{ est un isomorphisme de } H_o^1 \cap w_o^\perp \text{ sur } w_o^o$$

où

$$w_o^o = \{v \in H^{-1}(\Omega) \ ; \ \langle v, w_o \rangle = 0\} ,$$

le lemme est complètement démontré puisque

$$\mathbb{R} B_o w_o \oplus w_o^o = H^{-1} . \quad \blacksquare$$

Démonstration de (3.6). On a

$$(3.7) \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial w}\right)_o = \lambda_o A_o - \left(\frac{1}{\lambda_o} I - G_o B_o\right) .$$

Remarquons que $B_o w_o$ est un vecteur propre de $(G_o B_o)^* = B_o G_o$, associé à la valeur propre simple $\frac{1}{\lambda_o}$ et par conséquent, d'après l'alternative de Freedholm,

$$\frac{1}{\lambda_o} I - G_o B_o \text{ est un isomorphisme de } w_o^{\perp} \text{ sur } (B_o w_o)^{\perp}$$

et donc de $H_o^1(\Omega) \cap w_o^{\perp}$ sur $H_o^1(\Omega) \cap (B_o w_o)^{\perp}$.

D'autre part A_o est un isomorphisme de $(B_o w_o)^{\perp} \cap H_o^1(\Omega)$ sur w_o^o et donc grâce à (3.7) on en déduit (3.6). ∎

Lemme 3.2. Pour tout point u_o de $\mathcal{U} \subset L^{\infty}(\Omega)$ il existe une boule D de centre u_o et une fonction continue unique $Y(u)$ définie dans D de classe C^1 telles que

$$(3.8) \qquad Y(u) \in H_o^1 \cap S_1 \times \mathbb{R}$$

$$(3.9) \qquad Y(u_o) = (w_o, \lambda_o)$$

$$(3.10) \qquad F(u, Y(u)) = 0 \quad \forall u \in D .$$

Démonstration : D'après le Lemme 3.1 on peut appliquer le théorème des fonctions implicites à la fonction F définie sur :

$$\mathcal{U} \times (w_o + H_o^1(\Omega) \cap w_o^{\perp}) \times \mathbb{R} .$$

Il existe donc une boule D de centre u_o et une fonction unique $\tilde{Y}(u)$ définie sur D de classe C^1 vérifiant (3.9), (3.10)

$$(3.8) \qquad \tilde{Y}(u) \in (w_o + H_o^1(\Omega) \cap w_o^{\perp}) \times \mathbb{R} .$$

Si l'on normalise la première composante de $\tilde{Y}(u)$ on obtient une fonction unique $Y(u)$ de classe C^1 vérifiant (3.8), (3.9) et (3.10). ∎

Théorème 3.1. Si l'on suppose que a et b vérifient l'hypothèse (3.1) alors les applications

$$u \longrightarrow \lambda(u)$$

$$u \longrightarrow w(u)$$

sont différentiables en tout point u_o de $\mathcal{O}$, de plus

$$\lambda'(u_o).h = \frac{\int_\Omega \{(a'(u_o).h)(x)\ |\nabla w_o(x)|^2 - \lambda_o (b'(u_o).h)(x)\ w_o^2(x)\}\ dx}{\int_\Omega b(u_o)(x)\ w_o^2(x)\ dx} \tag{3.12}$$

où

$$w_o = w(u_o) \qquad \lambda_o = \lambda(u_o)\ .$$

Démonstration : Posons

$$\hat{Y}(u) = (w(u),\lambda(u)) \in (H_o^1(\Omega) \cap S_1) \times \mathbb{R}\ .$$

D'après la Proposition 2.1 $\hat{Y}(u)$ est continue sur D, comme on a unicité de la fonction Y définie dans le Lemme 3.3 on en déduit que

$$Y(u) = \hat{Y}(u) = (w(u),\lambda(u))$$

et d'après (3.10)

$$(\frac{\partial F}{\partial \lambda})_o (\lambda'(u_o).h) + (\frac{\partial F}{\partial w})_o (w'(u_o).h) = - (\frac{\partial F}{\partial u_o})_o .h \quad . \tag{3.13}$$

Compte tenu de (3.6) on a

$$\langle (\frac{\partial F}{\partial \lambda})_o (\lambda'(u_o).h), w_o \rangle = - \langle (\frac{\partial F}{\partial u_o})_o .h, w_o \rangle$$

ce qui d'après (3.4), (3.5) nous donne (3.12). ∎

4 - PSEUDO-CONCAVITE ET FAIBLE * SEMI-CONTINUITE SUPERIEURE DE $\lambda(u)$.

Théorème 4.1. Soit C un convexe contenu dans $\mathcal{O}$. On suppose que

(4.1) a et b sont continument différentiables de $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{U}$;

(4.2) b est convexe sur C relativement au cône des fonctions positives de $L^{\infty}(\Omega)$;

(4.3) a est concave sur C relativement au même cône

alors

$$\lambda(v) \leqslant \lambda(u) + \lambda'(u).(v-u) \frac{\int_{\Omega} b(u)(x)\ w^2(u;x)\ dx}{\int_{\Omega} b(v)(x)\ w^2(u,x)\ dx} \quad \forall\ (u,v) \in C \times C \ . \tag{4.4}$$

Démonstration : Afin d'alléger l'écriture on supprime la variable d'intégration x . Appelons θ la quantité située à droite dans l'inégalité (4.4). On a, d'après (3.12)

$$\theta = \frac{\lambda(u) \int_{\Omega} b(v)\ w^2(u)\ dx + \int_{\Omega} (a'(u).(v-u))|\nabla w(u)|^2\ dx}{\int_{\Omega} b(v)\ w^2(u)\ dx} \tag{4.5}$$

$$\frac{-\lambda(u) \int_{\Omega} (b'(u).(v-u))\ w^2(u)\ dx}{\int_{\Omega} b(v)\ w^2(u)\ dx} \ .$$

Et (4.2), (4.3) impliquent

$$a'(u).(v-u) \geqslant a(v) - a(u) \tag{4.6}$$

et

$$b'(u).(v-u) \leqslant b(v) - b(u) \ , \tag{4.7}$$

d'où, compte tenu de (1.19),

$$\theta \geq \frac{\int_\Omega a(v)|\nabla w(u)|^2 \, dx}{\int_\Omega b(v)\, w^2(u)\, dx} \geq \lambda(v) \quad . \blacksquare$$

Remarque 4.1. Cette relation (4.4) est fondamentale car elle permettra au chapitre III de montrer que λ est pseudoconcave et donc que l'ensemble Λ_c est convexe où

$$\Lambda_c = \{v \in C \; ; \; \lambda(v) \geq c\} \quad .$$

On va admettre, pour l'instant, ce résultat pour pouvoir démontrer la

Proposition 4.1. Soit C un convexe contenu dans $\mathcal{O}$. On suppose que a et b vérifient (4.1), (4.2), (4.3) et que chacune des fonctions a et b vérifie les deux hypothèses suivantes (énoncées seulement pour a)

(4.8) Si $u_n \in C$ $u_n \to u \in C$ p.p. alors $a(u_n) \to a(u)$ p.p. et

(4.9) Si $u_n \in C$ $|u_n|_\infty \leq k_1$ alors $\exists\, k_2 > 0$ tel que $|a(u_n)|_\infty \leq k_2$,

alors

$\lambda(u)$ est faible $*$ semi-continue supérieurement sur C .

Démonstration : Il faut montrer que le convexe Λ_c est faible $*$ fermé. Nous aurons besoin pour cela des deux résultats suivants :

Lemme 4.1. Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, si Λ est un convexe de $L^\infty(\Omega)$ et si u est un point adhérent à Λ pour la topologie $\sigma(L^\infty, L^1)$ alors il existe une suite (u_n) d'éléments de Λ telle que

(4.10) $u_n \to u$ dans $L^p(\Omega)$ $\forall\, p \geq 1$, $p \neq \infty$,

(4.11) $u_n \to u$ pour la topologie $\sigma(L^\infty, L^1)$.

Lemme 4.2. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, (v_n) une suite d'éléments de $L^\infty(\Omega)$ et $v \in L^\infty(\Omega)$ tels que

$$|v_n|_\infty \leq k_1 \quad \text{et} \quad v_n \to v \quad \text{p.p. dans } \Omega$$

alors

$$v_n \longrightarrow v \text{ dans } L^\infty(\Omega) \text{ pour la topologie } \sigma(L^\infty, L^1) .$$

Admettons pour l'instant ces Lemmes et continuons la démonstration de la Proposition 4.1. Soit u un point adhérent à l'ensemble Λ_c, d'après le Lemme 4.1, il existe une suite (u_n) d'éléments de Λ_c vérifiant (4.10), (4.11). Cette dernière relation implique :

$$|u_n|_\infty \leq k \qquad \forall\, n . \tag{4.12}$$

D'après (4.10) on peut supposer, quitte à extraire une sous-suite, que

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{p.p. dans } \Omega . \tag{4.13}$$

Les hypothèses (4.8) et (4.9) montrent que l'on peut appliquer aux suites $a(u_n)$ et $b(u_n)$ le Lemme 4.2 et par suite

$$a(u_n) \longrightarrow a(u) \quad \text{faible } *,$$

$$b(u_n) \longrightarrow b(u) \quad \text{faible } *.$$

D'autre part on a

$$c \leq \lambda(u_n) \leq \frac{\int_\Omega a(u_n)\, |\nabla w(u)|^2\, dx}{\int_\Omega b(u_n)\, w^2(u)\, dx} \qquad \forall\, n ,$$

et, si l'on passe à la limite, on obtient

$$c \leq \lambda(u) . \qquad \blacksquare$$

Démonstration du Lemme 4.1. Voir Grothendieck [6] p.96.

Démonstration du Lemme 4.2. $\exists\, \Omega' \subset \Omega$ tel que $\text{mes}(\Omega \setminus \Omega') = 0$ et

$$|v_n(x)| \leq k_1 \qquad \forall\, x \in \Omega' .$$

Soit $\phi \in L^1(\Omega)$ alors

$$(v_n(x) - v(x))\,\phi(x) \longrightarrow 0 \quad \text{p.p. } x \in \Omega ,$$

$$|(v_n(x) - v(x))\,\phi(x)| \leqslant (k_1 + |v|_\infty)\,|\phi(x)| \quad \text{p.p. } x \in \Omega$$

et donc, d'après le Théorème de Lebesgue,

$$\int_\Omega (v_n(x) - v(x))\,\phi(x)\,dx \longrightarrow 0 . \quad \blacksquare$$

$$\int_\Omega (v_n(x) - v(x))\,\phi(x)\,dx \longrightarrow 0 .$$

Remarque 4.1. L'hypothèse (4.8) peut sembler artificielle mais cela provient du fait que l'on a considéré des fonctions abstraites a et b de $L^\infty(\Omega)$ dans $L^\infty(\Omega)$. Dans le cas où les fonctions a et b sont construites à partir de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ on verra, dans la prochaine section, que l'hypothèse se simplifie.

Remarque 4.2. Soit (Γ_1,Γ_2) une partition de Γ . Soit $e \in L^\infty(\Gamma_2)$ tel que $e(x) \geqslant \alpha > 0$ p.p. $x \in \Gamma_2$. Posons

$$W = \{v \in H^1(\Omega) \ ; \ v_{|\Gamma_1} = 0\}$$

$$(4.14) \qquad a_u(w,\phi) = \int_\Omega a(u)\,\nabla w\,\nabla\phi\,dx + \int_{\Gamma_2} e\,w\,\phi\,ds \quad \forall (w;\phi) \in W \times W .$$

Tout ce que l'on vient de faire dans ces quatre premières sections est valable si l'on prend cette nouvelle forme bilinéaire continue coercive sur W qui nous définit un isomorphisme Au de W sur W' . Si Ω et $a(u)$ sont suffisamment réguliers alors le problème (1.7) est équivalent dans ce cas à

$$- \operatorname{div}(a(u)\nabla w) - \lambda\, b(u) w = 0$$

$$\{u\,\frac{\partial w}{\partial n} + e\,w\}\Big|_{\Gamma_2} = 0$$

$$w\Big|_{\Gamma_1} = 0 .$$

On peut supposer $e = 0$ si la mesure superficielle de Γ_1 est non nulle car sur W $\int_\Omega |\nabla w(x)|^2\,dx$ est une norme équivalente à la norme habituelle, c'est-à-dire

celle induite par $H^1(\Omega)$.

5 - EXEMPLES.

Compte tenu de la Remarque 4.2. Nous considèrerons (Γ_1, Γ_2) une partition de Γ . On supposera toujours $\text{mes}\,\Gamma_1 \neq 0$ (il s'agit de la mesure superficielle), par contre Γ_2 pourra être de mesure nulle, la fonction e figurant dans (4.14) sera identiquement nulle.

Exemple 1. On suppose que

$$\mathcal{O} = \mathcal{U} \qquad a(u) = u \qquad b(u) = 1 \ . \tag{5.1}$$

Les relations (1.19), (3.12) et (4.4) deviennent dans ce cas :

$$\lambda(u) = \inf_{\substack{w \in W \\ \|w\|_o = 1}} \int_\Omega u(x) |\nabla w(x)|^2 \, dx = \int_\Omega u(x) |\nabla w(x,u)|^2 \, dx \tag{5.2}$$

$$\lambda'(u)\, h = \int_\Omega h(x) |\nabla w(u;x)|^2 \, dx \quad \forall\, h \in L^\infty(\Omega) \tag{5.3}$$

$$\lambda(v) \leq \lambda(u) + \lambda'(u).(v-u) \qquad \forall\, (v,u) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U} \ . \tag{5.4}$$

Cette dernière relation montre que

$$\lambda \text{ est concave sur } \mathcal{U} \ . \tag{5.5}$$

L'hypothèse (4.4) étant vérifiée, λ est faible $*$ s.c.s. Enfin (5.3), (5.4) impliquent que si $u \geq v$ alors $\lambda(u) \geq \lambda(v)$.

Exemple 2. On suppose que

$$\mathcal{O} = \mathcal{U} \qquad a(u) = 1 \qquad b(u) = u \ .$$

D'où

$$\lambda(u) = \inf_{\substack{w \in W \\ \|w\|_o = 1}} \frac{\int_\Omega |\nabla w(x)|^2 dx}{\int_\Omega u(x)\, w^2(x) dx} = \frac{\int_\Omega |\nabla w(u;x)|^2 dx}{\int_\Omega u(x)\, w^2(u;x) dx} \tag{5.6}$$

$$\lambda'(u)\,h = -\,\lambda(u)\,\frac{\int_\Omega h(x)\,w^2(u;x)\,dx}{\int_\Omega u(x)\,w^2(u;x)\,dx} \qquad (5.7)$$

Les relations (5.7) et (4.4) montrent que

$$v \geqslant u \Longrightarrow \lambda(v) \leqslant \lambda(u) \,. \qquad (5.8)$$

D'après la Proposition 2.2 $\lambda(u)$ est faible* séquentiellement continue.

Exemple 3. $\mathcal{O} = \mathcal{U}$ $\quad a(u) = u \quad$ $b(u) = u + \delta$ où δ est un scalaire strictement positif.

D'où

$$\lambda(u) = \inf_{\substack{w\in W \\ \|w\|_o=1}} \frac{\int_\Omega u(x)\,|\nabla w(x)|^2 dx}{\int_\Omega (u(x)+\delta)\,w^2(x)\,dx} = \frac{\int_\Omega u(x)\,|\nabla w(u;x)|^2 dx}{\int_\Omega (u(x)+\delta)\,w^2(u;x)\,dx} \qquad (5.9)$$

$$\lambda'(u).h = \frac{\int_\Omega \{|\nabla w(u;x)|^2 - \lambda(u)\,w^2(u;x)\}\,h(x)\,dx}{\int_\Omega (u(x)+\delta)\,w^2(u;x)\,dx} \,. \qquad (5.10)$$

D'après les résultats des sections précédentes $\lambda(u)$ est faible* s.c.s. sur $\mathcal{U}$ et pseudo concave sur $\mathcal{U}$.

Avant de considérer un problème où b ne sera pas affine. On va étudier les propriétés des fonctions de $L^\infty(\Omega)$ dans $L^\infty(\Omega)$ construites à partir de fonctions numériques.

Proposition 5.1. Soit $\mathfrak{a}$ une fonction continue de $]0,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$. Pour $u \in \mathcal{U}$ on pose

$$a(u) : x \rightsquigarrow \mathfrak{a}(u(x)) \,,$$

i) Alors $a(u) \in \mathcal{U}$ et vérifie (4.8) sur le convexe $\mathcal{U}$;

ii) Si $\mathfrak{a}$ est localement lipschitzienne alors a est continue sur $\mathcal{U}$;

iii) Si $\mathfrak{a}$ est de classe C^1 et à dérivée localement lipschitzienne alors a est de classe C^1 sur $\mathcal{U}$ et

$$a'(u).h : x \in \Omega \rightsquigarrow \mathfrak{a}'(u(x)).h(x) \,;$$

iv) Si $\mathfrak{A}$ est concave [resp. convexe] alors a est concave [resp. convexe] par rapport au cône des fonctions positives p.p. ;

v) Si $\mathfrak{A}$ est croissante alors a vérifie (4.9) sur le convexe $\mathcal{U}$;

vi) Soit

$$C_\alpha = \{u \in \mathcal{U} \; ; \; u(x) \geqslant \alpha > 0 \;\; \text{p.p.} \;\; x \in \Omega\} \;, \; \alpha \text{ fixé},$$

alors a vérifie (4.9) sur le convexe C_α .

Exemple 4. $\mathcal{O} = \mathcal{U}$ $\quad a(u) = 1 \quad$ $b(u) = \dfrac{1}{u^2}$

c'est-à-dire $\mathbb{b}(\xi) = \dfrac{1}{\xi^2} \quad \forall \xi \in]0,+\infty[$, b est donc de classe C^1 sur $\mathcal{U}$, convexe sur $\mathcal{U}$. On a

$$\lambda(u) = \inf_{\substack{w \in W \\ \|w\|_o = 1}} \frac{\int_\Omega |\nabla w(x)|^2 \, dx}{\int_\Omega \frac{w^2(x)}{u^2(x)} \, dx} = \frac{\int_\Omega |\nabla w(u;x)|^2 \, dx}{\int_\Omega \frac{w^2(u;x)}{u^2(x)} \, dx} \tag{5.11}$$

$$\lambda'(u).h = \frac{2\lambda(u) \int_\Omega \frac{w^2(u;x)}{u^3(x)} h(x) \, dx}{\int_\Omega \frac{w^2(u;x)}{u^2(x)} \, dx} \tag{5.12}$$

Les relations (5.11) et (4.4) montrent que

$$\forall (u,v) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}, \; v \leqslant u \implies \lambda(v) \leqslant \lambda(u) \; . \tag{5.13}$$

Sur C_α l'hypothèse (4.9) est vérifiée pour b et par conséquent $\lambda(u)$ est faible * s.c.s. sur C_α .

Remarque 5.1. Constatons que dans tous les exemples $\lambda'(u)$ est un élément de $L^1(\Omega)$.

III - OPTIMISATION EN THEORIE DES STRUCTURES.

Avant d'énoncer et d'étudier les problèmes d'optimisation, nous allons rappeler quelques définitions et propriétés des fonctions pseudo-convexes et quasi-convexes sur un E.L.C.S. : E . On trouvera dans MANGASARIAN [12] le cas où E' est de dimension finie.

1 - FONCTIONS PSEUDOCONVEXES ET QUASICONVEXES.

Soient E un E.L.C.S. sur $\mathbb{R}$, G une fonction de E dans $\mathbb{R}$ et C un convexe de E . On pose pour tout $c \in \mathbb{R}$

$$\Lambda_c = \{u \in C \ ; \ G(u) \leq c\} .$$

Définition 1.1. On dit que G est quasiconvexe sur C si $\forall c \in \mathbb{R}$, Λ_c est convexe.

On dit que G est quasiconcave sur C si -G est quasiconvexe.

Remarque 1.1. La notion de quasiconvexité est indépendante de la topologie définie sur E .

Proposition 1.1. On a les résultats suivants

(i) G est quasiconvexe sur C si et seulement si

$$(1.1) \qquad \forall (u,v) \in C \times C \ , \ \forall \xi \in [0,1] \ , \ G(\xi u + (1-\xi)v) \leq \mathrm{Max}(G(v),G(u)) .$$

(ii) On suppose que G est Gateaux-différentiable sur C et on note $G'(u)$ sa Gateaux-différentielle ($G'(u) \in E'$) ; G est quasiconvexe sur C si et seulement si

$$(1.2) \qquad \forall (u,v) \in C \times C \text{ tel que } G(v) \leq G(u) \text{ alors } G'(u).(v-u) \leq 0 .$$

Démonstration : (i) est évident. Quant à (ii) il suffit de regarder la démonstration de [12] et de se rappeler qu'une fonction Gateaux-différentiable sur C est continue sur tout segment $[u,v]$. ∎

Remarque 1.2. La propriété (1.2) est équivalente à

(1.3) $\forall (u,v) \in C \times C$ tel que $G'(u).(v-u) > 0$ alors $G(v) > G(u)$.

Définition 1.2. On dit que G est pseudoconvexe sur C si G est Gateaux-différentiable sur C et si

(1.4) $\forall (u,v) \in C \times C$ tel que $G'(u).(v-u) \geqslant 0$ alors on a $G(v) \geqslant G(u)$.

On dit que G est pseudoconcave sur C si -G est pseudoconvexe sur C .

Remarque 1.3. La propriété (1.4) est équivalente à

(1.5) $\forall (u,v) \in C \times C$ tel que $G(v) < G(u)$ alors on a $G'(u).(v-u) < 0$.

Proposition 1.2. Si G est pseudoconvexe sur C alors G est quasiconvexe sur C et

(1.6) $\begin{cases} \forall (u,v) \in C \times C \text{ tel que } G(v) < G(u) \text{ on a } G(\xi u + (1-\xi)v) < G(u) \\ \text{pour tout } \xi \in]0,1] . \end{cases}$

Démonstration : Il faut montrer que la propriété (1.1) est vérifiée c'est-à-dire

(1.7) $G(w) \leqslant \text{Max}(G(u),G(v))$ où $w = \xi u + (1-\xi)v$, $\xi \in [0,1]$.

On a

(1.8) $G'(w).(v-w) = \xi\, G'(w).(v-u)$ et

(1.9) $G'(w).(u-w) = -(1-\xi)\, G'(w).(v-u)$.

Si $G'(w).(v-u) \geqslant 0$ alors d'après (1.8), (1.4)

$$G(v) \geqslant G(w) ;$$

si $G'(w).(v-u) < 0$ alors d'après (1.9), (1.4)

$$G(u) \geqslant G(w) .$$

Dans les deux cas (1.7) est vérifiée.

La démonstration de (1.6) se fait comme dans [12].

2 - FORMULATION DES PROBLEMES.

Soit Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^n$ à frontière Γ lipschitzienne. On pose

$$\mathcal{U} = \{u \in L^\infty(\Omega) \ ; \ \exists\ \alpha(u) > 0 \quad u(x) \geqslant \alpha(u) \quad \text{p.p. } x \in \Omega\} \ .$$

Soient a et b deux applications continument différentiables de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{U}$, a étant concave et b convexe. On considère la fonction coût suivante :

$$J(u) = \int_\Omega u(x)\ dx \quad u \in \mathcal{U} \ . \tag{2.1}$$

On pose

$$\lambda(u) = \inf_{\substack{w \in W \\ w \neq o}} \frac{\int_\Omega a(u)(x)\ |\nabla w(x)|^2\ dx}{\int_\Omega b(u)(x)\ w^2(x)\ dx} \tag{2.2}$$

où

$$W = \{w \in H^1(\Omega) \ ; \ w_{|\Gamma_1} = 0\}$$

(Γ_1, Γ_2) étant une partition de Γ telle que mes $\Gamma_1 \neq 0$. D'après le Chapitre II, est différentiable sur $\mathcal{U}$ sa dérivée étant donnée par II.(3.12) c'est-à-dire

$$\lambda'(u).v = \frac{\int_\Omega \{(a'(u).v)(x)\ |\nabla w(u;x)|^2 - \lambda(u)(b'(u).v)(x)\ w^2(u;x)\}\ dx}{\int_\Omega b(u)(x)\ w^2(u;x)\ dx} \ . \tag{2.3}$$

De plus on a II.(4.4) c'est-à-dire

$$\lambda(v) \leqslant \lambda(u) + \lambda'(u).(v-u)\ \frac{\int_\Omega b(u)(x)\ w^2(u;x)\ dx}{\int_\Omega b(v)(x)\ w^2(u;x)\ dx} \qquad \forall\ (u,v) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U} \ . \tag{2.4}$$

Proposition 2.1. La fonction $\lambda(u)$ est pseudoconcave et quasiconcave sur $\mathcal{U}$.

Démonstration : Cela résulte de (2.4), de la définition des fonctions pseudoconcaves et de la Proposition 1.2. ∎

On va considérer une structure d'épaisseur uniforme u_1 , par un changement de variable on peut supposer

$$u_1(x) \equiv 1 \ . \tag{2.5}$$

On pose

$$\lambda_1 = \lambda(u_1) \quad \text{et} \quad J_1 = J(u_1) \ . \tag{2.6}$$

Les problèmes auxquels on va s'intéresser sont les suivants :

$$(\mathcal{P}_o) \qquad \inf_{\substack{u\in\mathcal{U} \\ \lambda(u)=\lambda_1}} J(u)$$

et

$$(\mathcal{R}_o) \qquad \sup_{\substack{u\in\mathcal{U} \\ J(u)=J_1}} \lambda(u) \ .$$

Remarque 2.1. La variable u représente l'épaisseur d'une structure et par conséquent pour des raisons technologiques on est obligé de rajouter à ces problèmes une contrainte supplémentaire

$$u(x) \geq \alpha$$

où α est fixé et vérifie

$$0 < \alpha < 1 \ . \tag{2.7}$$

Par conséquent on va introduire le convexe C_α défini par

$$C_\alpha = \{u \in \mathcal{U} \ ; \ u(x) \geq \alpha \ \text{ p.p. } x \in \Omega\} \ , \tag{2.8}$$

ainsi que les problèmes

$$(\mathcal{P}_\alpha) \qquad \inf_{\substack{u\in C_\alpha \\ \lambda(u)=\lambda_1}} J(u)$$

et

$$(\mathcal{R}_\alpha) \qquad \sup_{u \in C_\alpha} \lambda(u) \ .$$
$$J(u) = J_1$$

Pour obtenir des résultats d'existence nous serons amenés à rajouter une contrainte supplémentaire

$$u(x) \leqslant \beta \quad \text{p.p. } x \in \Omega$$

où β est fixé et vérifie

$$1 < \beta \ . \tag{2.9}$$

Si l'on pose

$$C_{\alpha,\beta} = \{u \in \mathcal{U} \ ; \ \alpha \leqslant u(x) \leqslant \beta \quad \text{p.p. } x \in \Omega\} \ , \tag{2.10}$$

on appelle $(\mathcal{P}_{\alpha,\beta})$ et $(\mathcal{R}_{\alpha,\beta})$ les problèmes $(\mathcal{P}_\alpha)$ et $(\mathcal{R}_\alpha)$ où la contrainte

$$u \in C_\alpha$$

a été remplacée par

$$u \in C_{\alpha,\beta} \ .$$

Nous autoriserons β à valoir $+\infty$ et ainsi le problème $(\mathcal{P}_\alpha)$ sera $(\mathcal{P}_{\alpha,\infty})$, de même pour $(\mathcal{R}_\alpha)$. Mais nous préciserons toujours dans l'énoncé des résultats obtenus si l'hypothèse

$$\beta < +\infty$$

est intervenue.

Si a et b sont définies par des fonctions de $]0,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$: $\mathbb{a}$ et $\mathbb{b}$, on supposera $\mathbb{a}$ et $\mathbb{b}$ de classe C^2, $\mathbb{a}$ concave et $\mathbb{b}$ convexe. Sous ces hypothèses on a vu que a et b possédaient les propriétés que l'on a énoncées au début de ce paragraphe, de plus d'après la Proposition II.5.1 et II.4.1.

(2.11) $\lambda(u)$ est faible * s.c.s. sur $C_{\alpha,\beta}$.

3 - ETUDE DU PROBLEME $\mathcal{P}_o$.

Proposition 3.1. On suppose de plus que

(3.1) $\exists\ u_\gamma \in \mathcal{U}$ tel que $\lambda(u_\gamma) > \lambda_1$.

Si $\bar{u}$ est solution du problème $\mathcal{P}_o$ alors $\exists\ \eta \in \mathbb{R}$ tel que

(3.2) $$J'(u) + \eta\, \lambda'(u) = 0 .$$

Démonstration : J et λ étant Frechet-différentiables pour démontrer (3.2), il suffit de montrer que $\bar{u}$ est un point régulier pour λ ; c'est-à-dire que

$$\lambda'(\bar{u}) \neq 0 .$$

Supposons le contraire alors on a

$$\lambda'(\bar{u}).(u_\gamma - \bar{u}) = 0 .$$

Et donc, d'après (2.4) cela implique

$$\lambda(u_\gamma) \leq \lambda(\bar{u}) = \lambda_1 ,$$

ce qui est en contradiction avec (3.1). ∎

Proposition 3.2. Soit $\bar{u} \in \mathcal{U}$ tel que

$$\lambda(\bar{u}) = \lambda_1 ,$$

et

$$\exists\ \eta \leq 0 \text{ vérifiant (3.2)}$$

alors $\bar{u}$ est solution du problème $(\mathcal{P}_o)$.

Démonstration : Soit v vérifiant la contrainte

$$\lambda(v) = \lambda_1 \ .$$

λ étant quasi-concave on a, d'après (1.2),

$$\lambda'(u)(v-\bar{u}) \geqslant 0$$

et donc, puisque $\eta < 0$, (3.2) implique

$$J'(u).(v-\bar{u}) \geqslant 0$$

c'est-à-dire

$$J(v) \geqslant J(\bar{u}) \ .$$

∎

Remarque 3.1. Le caractère particulier de la fonctionnelle J n'est pas intervenu au cours de la démonstration. On n'a utilisé que la pseudoconvexité de J .

On pose

$$\mathcal{V} = \{v \in \mathcal{U} \ ; \ \lambda(v) = \lambda_1\} \ .$$

Proposition 3.3. Si a et b sont définies par des fonctions $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ et si l'hypothèse (3.1) est vérifiée alors $\bar{u} \in \mathcal{V}$ est solution du problème $(\mathcal{P}_o)$ si $\exists \ \nu \in \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\mathfrak{a}'(\bar{u}(x)) \, |\nabla w(\bar{u};x)|^2 - \lambda_1 \, \mathfrak{b}'(\bar{u}(x)) \, w^2(\bar{u};x) = \nu \ . \tag{3.3}$$

De plus si ν est strictement positif la réciproque est vérifiée.

Démonstration : Comme $J'(u) = 1$ pour tout $u \in \mathcal{U}$, la constante η intervenant dans (3.2) est différente de zero. Posons

$$\nu = - \frac{\int_\Omega \mathfrak{b}(\bar{u}(x)) \, w^2(\bar{u};x) \, dx}{\eta}$$

alors les relations (2.3) et (3.2) impliquent (3.3).

D'où le résultat. ∎

Application 3.1 : Exemple 1.

Si

$$u_\gamma(x) \equiv \gamma \quad \text{où} \quad \gamma > 1$$

alors, comme

$$\lambda(u_\gamma) = \gamma\, \lambda_1 ,$$

(3.1) est vérifiée. Et donc par application de la Proposition 3.3 on sait qu'il existe $\nu \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$|\nabla w(\bar{u};x)|^2 = \nu$$

ce qui implique $\nu > 0$. De plus on a, d'après I.(5.2)

$$\nu \int_\Omega \bar{u}(x)\, dx = \lambda(\bar{u}) .$$

Enonçons le résultat : une condition nécessaire et suffisante pour que $\bar{u} \in \mathcal{V}$ soit solution du problème $\mathcal{P}_o$ pour l'exemple 1 est que $w(u)$ (définie par la Proposition I.1.1) vérifie

(3.4) $$|\nabla w(\bar{u};x)|^2 = \nu$$

où ν est une constante strictement positive.

On retrouve ainsi les résultats de [1].

Cette condition nécessaire et suffisante va nous permettre d'obtenir la solution. Si $\Omega =]0,1[$ et

$$W = \{w \in H^1(\Omega) \ ; \ w(0) = 0\} .$$

On obtient

$$\lambda_1 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 , \quad \nu = 3 ,$$

$$\int_\Omega \bar{u}\, dx = \frac{\lambda_1}{3} = \frac{\pi^2}{12} \approx 0{,}82 \quad \left(\int_\Omega 1\, dx\right)$$

et

$$\bar{u}(x) = \frac{\lambda_1}{2}\,(1 - x^2) .$$

Application 3.2 : Exemple 3.

Si l'on considère la fonction

$$u_\gamma(x) \equiv \gamma > 1$$

elle vérifie

$$\lambda(u_\gamma) = \frac{\gamma}{\gamma+\delta}\,(1+\delta)\,\lambda_1 > \lambda_1 .$$

Par suite, compte tenu de la Proposition 3.3 et de l'expression I.(5.10) de la dérivée, on sait qu'il existe $\nu \in \mathbb{R}$ tel que

$$|\nabla w(\bar{u};x)|^2 - \lambda(u)\, w^2(\bar{u};x) = \nu .$$

En multipliant par $\bar{u}(x)$, en intégrant sur Ω et en utilisant la relation I.(5.9) on obtient

$$\lambda(\bar{u})\delta = \nu \int_\Omega \bar{u}(x)\, dx .$$

Cette relation implique $\nu > 0$ puisque $\delta > 0$.

Donc on vient de montrer : une condition nécessaire et suffisante pour que $\bar{u} \in \mathcal{V}$ soit solution du problème $\mathcal{P}_o$ pour l'exemple 3 est que $w(\bar{u})$ vérifie

$$|\nabla w(\bar{u};x)|^2 - \lambda_1\, w^2(\bar{u};x) = \nu , \tag{3.5}$$

où ν est une constante strictement positive.

Si l'on prend $\Omega =]0,1[$ et $W = H_o^1(\Omega)$ on obtient

$$\lambda_1 = \frac{\pi^2}{1+\delta} ,$$

$$w(\bar{u};x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mu_1} \operatorname{sh} \mu_1 x & 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2} \\[2ex] \dfrac{1}{\mu_1} \operatorname{sh} \mu_1 (1-x) & \dfrac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

où $\mu_1 = \sqrt{\lambda_1}$,

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} \frac{\delta}{2}\left(\frac{ch^2 \frac{\mu_1}{2}}{ch^2 \mu_1 x} - 1\right) & 0 \leq x \leq 1/2 \\ \frac{\delta}{2}\left(\frac{ch^2 \frac{\mu_1}{2}}{ch^2 \mu_1 (1-x)} - 1\right) & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

et

$$J(\bar{u}) = \frac{\delta}{2}\left(\frac{sh\ \mu_1}{\mu_1} - 1\right) \leq \frac{\pi^2}{12} < J(1) \ .$$

On trouvera dans [2] le calcul explicite de la solution dans le cas d'un ouvert rectangulaire.

Application 3.3 : Exemple 4.

On considère toujours la même fonction u_γ et sur cet exemple elle vérifie

$$\lambda(u_\gamma) = \gamma^2 \lambda_1 > \lambda_1 \ .$$

Par conséquent d'après les résultats précédents $\exists\ \nu \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lambda(u)\ \frac{w^2(\bar{u},x)}{\bar{u}^3(x)} = \nu \ .$$

Cette relation montre que $\nu > 0$. Si on multiplie par $\bar{u}(x)$ cette égalité et si l'on intègre sur Ω on obtient

$$\int_\Omega |\nabla w(\bar{u};x)|^2\ dx = \nu \int_\Omega \bar{u}(x)\ dx \ .$$

On a donc sur cet exemple le résultat suivant : une condition nécessaire et suffisante pour que $\bar{u} \in \mathcal{V}$ soit solution du problème $\mathcal{P}_0$ pour l'exemple 4 est que $w(\bar{u})$ vérifie

$$\lambda_1\ \frac{w^2(\bar{u},x)}{\bar{u}^3(x)} = \nu$$

où $\nu > 0$.

4 - ETUDE DU PROBLEME $\mathcal{R}_o$.

Proposition 4.1. Soit $\bar{u} \in \mathcal{U}$ vérifiant la contrainte

$$J(\bar{u}) = J_1 \ , \tag{4.1}$$

une condition nécessaire et suffisante pour que $\bar{u}$ soit solution du problème $\mathcal{R}_o$ est qu'il existe $\eta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lambda'(\bar{u}) + \eta\, J'(\bar{u}) = 0 \ . \tag{4.2}$$

Démonstration : Soit $\bar{u}$ une solution de $\mathcal{R}_o$. J et λ étant différentiables sur l'ouvert $\mathcal{U}$ et $J'(u) \neq 0$, on sait qu'il existe η vérifiant (4.2). Etudions la réciproque.

Soit $v \in \mathcal{U}$ tel que

$$J(v) = J_1 = J(\bar{u}) \ .$$

La relation (4.2) s'écrit :

$$\lambda'(u).(v-\bar{u}) = -\eta \int_\Omega (v-\bar{u})\, dx = 0 \ .$$

Ce qui implique, puisque λ est pseudoconcave,

$$\lambda(v) \leqslant \lambda(\bar{u}) \ .$$

Remarque 4.1. Ici le caractère linéaire de J est intervenu . Si on avait supposé seulement J pseudoconvexe, il aurait fallu faire l'hypothèse $\eta \leqslant 0$ pour démontrer la réciproque.

Remarque 4.2. Si a et b sont définies par des fonctions $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ alors, comme dans le paragraphe précédent, (4.2) peut être remplacé par :

$$\mathfrak{a}'(\bar{u}(x))\left|\nabla w(\bar{u};x)\right|^2 - \lambda(\bar{u})\, \mathfrak{b}'(\bar{u}(x))\, w^2(\bar{u};x) = \nu \ . \tag{4.3}$$

Application 4.1 : Exemple 4.

Enonçons le résultat : une condition nécessaire et suffisante pour que

$\bar{u} \in \mathcal{U}$ vérifiant (4.1) soit solution du problème $\mathcal{R}_o$ pour l'exemple 4 est que $(\lambda(\bar{u}), w(\bar{u}))$ vérifie :

$$\frac{\lambda(\bar{u})\, w^2(\bar{u};x)}{\bar{u}^3(x)} = \nu \tag{4.4}$$

où ν est une constante strictement positive.

J.B. KELLER [12] avait montré en admettant implicitement la différentiabilité $(\lambda(u), w(u))$, que cette condition (4.4) était nécessaire.

Remarque 4.3. La fonction $w(\bar{u})$ étant continue sur $\bar{\Omega}$, la relation (4.4) montre que $\bar{u}$ va s'annuler sur la partie du bord où $w(\bar{u})$ sera nulle. Par suite $\bar{u}$ n'appartient pas à $\mathcal{U}$.

Avant d'étudier les problèmes $\mathcal{P}_{\alpha,\beta}$ et $\mathcal{R}_{\alpha,\beta}$ nous allons considérer ces problèmes dans un cadre abstrait.

5 - ETUDE DES PROBLEMES : CADRE ABSTRAIT.

Soient E un E.L.C.S., C un convexe de E, J et λ deux applications de C dans $\mathbb{R}$. On s'interesse aux problèmes d'optimisation suivants :

Problème $\mathcal{P}$ $\qquad \inf_{\substack{\lambda(u)=\lambda_1 \\ u\in C}} J(u)$

Problème $\mathcal{Q}$ $\qquad \inf_{\substack{\lambda(u)\geqslant\lambda_1 \\ u\in C}} J(u)$

et

Problème $\mathcal{R}$ $\qquad \sup_{\substack{J(u)=J_1 \\ u\in C}} \lambda(u)$

où $\lambda_1 = \lambda(u_1)$, $J_1 = J(u_1)$ $\quad u_1 \in C$.

5.1. ETUDE DES PROBLEMES $\mathcal{P}$ ET $\mathcal{Q}$.

Proposition 5.1. On suppose que

$$J \text{ est pseudoconvexe sur } C, \tag{5.1}$$

(5.2) λ est continue sur tout segment $[u,v]$ de C ,

(5.3) $$\begin{cases} \exists\ u_\alpha \in C \text{ tel que } \lambda(u_\alpha) < \lambda_1 \text{ et} \\ \text{pour tout } u \in C\ ,\ u \neq u_\alpha \quad J(u) > J(u_\alpha) \end{cases}$$

alors les problèmes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont équivalents.

Démonstration : On va tout d'abord démontrer le

Lemme 5.1. Avec les mêmes hypothèses que dans la Proposition 5.1. on a

(5.4) $$\text{Inf } \mathcal{Q} = \text{Inf } \mathcal{P}\ .$$

Démonstration : Comme on a toujours

(5.5) $$\text{Inf } \mathcal{Q} \leq \text{Inf } \mathcal{P}\ ,$$

pour montrer le résultat il suffit de montrer que l'inégalité stricte est absurde. Supposons donc que

$$\exists\ v \in C \text{ tel que } \lambda(v) > \lambda_1 \text{ et } J(v) < \text{Inf } \mathcal{P}\ .$$

Alors, d'après (5.3), (1.6), on a

(5.6) $$\forall\ \xi \in]0,1[\quad J(\xi u_\alpha + (1-\xi)v) < \text{Max}(J(u_\alpha), J(v)) \leq \text{Inf } \mathcal{P}\ .$$

L'hypothèse (5.2) montre que la fonction

$$\xi \longrightarrow f(\xi) = \lambda(\xi u_\alpha + (1-\xi)v)$$

est continue sur $[0,1]$. Or

$$f(0) = \lambda(v) \quad \lambda_1$$

et

$$f(1) = \lambda(u_\alpha) < \lambda_1$$

par conséquent

$$\exists\ \xi_o \in]0,1[\text{ tel que}$$

$$f(\xi_o) = \lambda_1 .$$

Et par suite

$$\text{Inf } \mathcal{P} \leqslant J(\xi_o\, u_\alpha + (1-\xi_o)v) ,$$

inégalité qui contredit (5.6). ∎

Ce lemme montre que si $\bar{u}$ est solution du problème $\mathcal{P}$, $\bar{u}$ est solution du problème $\mathcal{Q}$. Etudions la réciproque.

Soit $\hat{u}$ une solution du problème $\mathcal{Q}$. On a

$$J(\hat{u}) = \text{Inf } \mathcal{Q} = \text{Inf } \mathcal{P}$$

et

$$\lambda(\hat{u}) \geqslant \lambda_1 .$$

Supposons que cette dernière inégalité soit stricte, alors par le même raisonnement que précédemment, on peut affirmer que

$$\exists\ \xi_o \in]0,1[\text{ tel que } \lambda(\xi_o\, u_\alpha + (1-\xi_o)\hat{u}) = \lambda_1 .$$

Et, comme

$$J(u_\alpha) < J(\hat{u}) ,$$

on a, en appliquant la Proposition 1.2

$$J(\xi_o\, u_\alpha + (1-\xi_o)\hat{u}_\alpha) < J(\hat{u}) = \text{Inf } \mathcal{P} ;$$

ce qui est absurde. ∎

5.2. ETUDE DES CONDITIONS D'OPTIMALITE.

Proposition 5.2. Sous les hypothèses (5.1),

(5.7) λ est pseudoconcave

et

(5.8) $\exists\ u_\gamma \in C$ tel que $\lambda(u_\gamma) > \lambda_1$

alors $\bar{u}$ est solution du problème $\mathcal{Q}$ si et seulement si $\exists\ \bar{\eta} \leq 0$ tel que

(5.9) $$J'(\bar{u}).(v-\bar{u}) + \bar{\eta}\ \lambda'(\bar{u}).(v-\bar{u}) \geq 0 \quad \forall\ v \in C$$

(5.10) $$\bar{\eta}(\lambda(\bar{u}) - \lambda_1) = 0 .$$

Démonstration : (i) La condition est nécessaire.

Soit $\bar{u}$ une solution du problème $\mathcal{Q}$. Alors d'après HALKIN [7] :

$$\exists\ (\bar{\eta}_o,\bar{\eta}_1) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que}$$

(5.11) $$(\bar{\eta}_o,\bar{\eta}_1) \neq 0$$

(5.12) $$(\bar{\eta}_o,\bar{\eta}_1) \leq 0$$

(5.13) $$\bar{\eta}_o\ J'(\bar{u}).(v-\bar{u}) - \bar{\eta}_1\ \lambda'(\bar{u}).(v-\bar{u}) \leq 0 \quad \forall\ v \in C$$

(5.14) $$\bar{\eta}_1(\lambda(\bar{u})-\lambda_1) = 0 .$$

On va montrer que $\bar{\eta}_o$ est différent de zéro.

Si $\bar{\eta}_1 = 0$ alors (5.11) implique $\bar{\eta}_o \neq 0$. Si $\bar{\eta}_1 \neq 0$ (5.14) implique $\lambda(\bar{u}) = \lambda_1$. Supposons alors que $\bar{\eta}_o = 0$. L'inéquation (5.13) s'écrit :

$$\lambda'(u).(v-\bar{u}) \leq 0 \quad \forall\ v \in C ,$$

et donc d'après (5.7) ,

$$\lambda(v) \leq \lambda(\bar{u}) = \lambda_1 \quad \forall\ v \in C ;$$

inégalité qui contredit (5.8).

On peut par conséquent diviser (5.13) par $\bar{\eta}_o$; d'où (5.9)

(ii) La condition est suffisante.

Soit $\bar{u} \in C$ vérifiant (5.9), (5.10) où $\bar{\eta} \leqslant 0$ et

$$\lambda(\bar{u}) \geqslant \lambda_1 .$$

Si $\bar{\eta} = 0$ alors (5.1) et (5.9) impliquent :

$$J(v) \geqslant J(\bar{u}) \quad \forall\, v \in C .$$

Et donc $\bar{u}$ est solution du problème $\mathcal{Q}$.

Si $\bar{\eta} \neq 0$ alors, d'après (5.10) ,

$$\lambda(\bar{u}) = \lambda_1 .$$

Soit $v \in C$ vérifiant la contrainte

$$\lambda(v) \geqslant \lambda_1 = \lambda(\bar{u}) .$$

(5.7) et (1.2) impliquent

$$\lambda'(\bar{u})(v-\bar{u}) \geqslant 0 ,$$

et donc

$$J'(\bar{u}).(v-\bar{u}) \geqslant 0 .$$

Inégalité qui entraîne, compte tenu de l'hypothèse (5.1)

$$J(v) \geqslant J(\bar{u}) .$$

Par suite : $\bar{u}$ est solution du problème $\mathcal{Q}$. ∎

Corollaire 5.1. On suppose que les hypothèses (5.1), (5.3), (5.7) et (5.8) sont vérifiées. Soit $\bar{u} \in C$ alors $\bar{u}$ est solution du problème $\mathcal{Q}$ ou du problème $\mathcal{P}$ si et seulement si $\exists\, \eta < 0$ tel que

(5.9) $$J'(\bar{u}).(v-\bar{u}) + \eta\, \lambda'(u).(v-\bar{u}) \geqslant 0 \quad \forall\, v \in C .$$

Démonstration : D'après le Proposition 5.1, les problèmes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont équivalents, par suite on peut appliquer la Proposition 5.2 au problème $\mathcal{P}$. Reste à montrer que $\overline{\eta} < 0$.

Si $\overline{\eta} = 0$ alors (5.1) et (5.9) impliquent

$$J(v) \geqslant J(\overline{u}) \quad \forall\, v \in C \ ;$$

ce qui est en contradiction avec (5.3). ∎

Remarque 5.1. On ne peut déduire de (5.9) un principe du maximum car la somme de deux fonctions pseudoconvexes n'est pas nécessairement pseudoconvexe.

5.3. DUALISATION DU PROBLEME $\mathcal{Q}$.

On va dualiser par les minimax le problème $\mathcal{Q}$ (cf. EKELAND-TEMAM [5] chapitre VI).

On a pour tout $u \in C$

$$\sup_{p \leq o} \left\{ J(u) + p(\lambda(u) - \lambda_1) \right\} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \lambda(u) < \lambda_1 \\ J(u) & \text{si } \lambda(u) \geqslant \lambda_1 \end{cases} .$$

Ce qui permet d'écrire le problème $\mathcal{Q}$

$$\inf_{u \in C} \sup_{p \leq o} \mathcal{L}(u,p) \tag{5.15}$$

où

$$\mathcal{L}(u,p) = J(u) + p(\lambda(u) - \lambda_1) \ . \tag{5.16}$$

On appelle problème dual de $\mathcal{Q}$ le problème

$$\mathcal{Q}^* \qquad \sup_{p \leq o} \inf_{u \in C} \mathcal{L}(u,p) \ .$$

Bien entendu on a

$$\sup \mathcal{Q}^* \leqslant \inf \mathcal{Q} \ . \tag{5.17}$$

Posons

$$h(p) = \inf_{u \in C} \mathcal{L}(u,p) \quad . \tag{5.18}$$

La fonction h est concave et s.c.s. puisque c'est l'enveloppe inférieure des fonctions affines :

$$p \in \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{L}(u,p) \quad .$$

Jusqu'à présent nous n'avions pas fait d'hypothèse particulière sur J et λ. Si l'on suppose que λ vérifie (5.8) alors on a

$$h(p) \longrightarrow -\infty \quad \text{quand} \quad p \longrightarrow -\infty \quad . \tag{5.19}$$

En effet (5.16) et (5.18) impliquent

$$h(p) \leqslant p(\lambda(u_\gamma) - \lambda_1) + J(u_\gamma) \tag{5.20}$$

et, compte tenu de (5.8), cela implique (5.19). D'où la

Proposition 5.3. Si la fonction λ vérifie la condition (5.8) alors le problème $\mathcal{Q}^*$, dual de $\mathcal{Q}$, admet une solution $\bar{p}$.

Proposition 5.4. On suppose que l'hypothèse (5.8) est vérifiée et que

pour tout $p < 0$ la fonction

$$u \longrightarrow \mathcal{L}(u,p) \quad \text{est quasiconvexe, sur} \quad C \tag{5.21}$$

$$J \quad \text{est s.c.i. sur} \quad C \tag{5.22}$$

$$\lambda \quad \text{est s.c.s. sur} \quad C \tag{5.23}$$

alors

$$\max_{p \leq o} \inf_{v \in C} \mathcal{L}(v,p) = \inf_{v \in C} \sup_{p \leq o} \mathcal{L}(v,p) \tag{5.24}$$

c'est-à-dire

$$\text{Sup } \mathcal{Q}^* = \text{Inf } \mathcal{Q} \ .$$

De plus

(5.25) $(\overline{u},\overline{p})$ point selle sur $C \times \mathbb{R}$ de $\mathcal{L}(u,p) \Longleftrightarrow \begin{cases} \overline{p} \text{ est solution de } \mathcal{Q}^* \\ \text{et} \\ \overline{u} \text{ est solution de } \mathcal{Q} \ . \end{cases}$

Démonstration : L'égalité (5.24) résultera du principe du minimax de Ky-Fan (cf. [3]) , si on montre qu'il existe $\tilde{v} \in C$ et $\xi \in \mathbb{R}$ tels que

(5.26) $$\xi < \text{Inf } \mathcal{Q}$$

et

$$I_\xi = \{p \leqslant 0 \ ; \ \mathcal{L}(\tilde{v},p) \geqslant \xi\} \text{soit compact} \ .$$

Quel que soit ξ vérifiant (5.26) on a, si l'on prend $\tilde{v} = u_\gamma$ et compte tenu de (5.8), (5.16) :

$$I_\xi = \left[\frac{\xi - J(u_\gamma)}{\lambda(u_\gamma) - \lambda_1} \ , \ 0\right] \ .$$

Donc I_ξ est compact.

(5.25) résulte de (5.24) et de la caractérisation suivante d'un point selle :

Lemme 5.1. Une fonction $\mathcal{L}$ définie sur $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ à valeurs réelles possède un point selle sur $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ si et seulement si

$$\max_{p \in \mathcal{B}} \inf_{u \in \mathcal{A}} \mathcal{L}(u,p) = \min_{u \in \mathcal{A}} \sup_{p \in \mathcal{B}} \mathcal{L}(u,p)$$

et ce nombre est alors égal à $\mathcal{L}(\overline{u},\overline{p})$.

5.4. ETUDE DU PROBLEME $\mathcal{R}$.

On peut si l'on fait les hypothèses similaires à celles faites dans les sections précédentes, appliquer les résultats obtenus. Par exemple l'équivalent de l'hypothèse (5.3) est

(5.27) $\left|\begin{array}{l} \exists\ u_o \in C \text{ tel que } J(u_o) > J_1\ ,\ \lambda(u_o) \geqslant \text{Sup } \mathcal{R} \text{ et pour tout } u \in C\ , \\ u \neq u_o \quad \lambda(u_o) > \lambda(u)\ . \end{array}\right.$

Mais pour certains problèmes cette hypothèse n'est pas vérifiée ; c'est le cas pour le problème $\mathcal{R}_\alpha$ dans le cas où le problème spectral est donné par celui décrit dans l'exemple 4 du paragraphe II.5.

Si $\text{Inf } \mathcal{P} > -\infty$ et si l'on pose

(5.28) $$J_1 = \text{Inf } \mathcal{P}$$

alors on va voir que les problèmes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ sont liés.

Proposition 5.5. Si on fait les hypothèses (5.1), (5.2) et (5.3) alors :

(i) si $\bar{u}$ est solution du problème $\mathcal{P}$, $\bar{u}$ est solution du problème $\mathcal{R}$ et toute solution du problème $\mathcal{R}$ est solution du problème $\mathcal{P}$.

(ii) si $\bar{u}$ est solution du problème $\mathcal{R}$ et si $\lambda(\bar{u}) \geqslant \lambda_1$ alors $\bar{u}$ est solution du problème $\mathcal{P}$.

Démonstration : Supposons que $\bar{u}$ ne soit pas solution de $\mathcal{R}$ alors il existe $\bar{v} \in C$ vérifiant

(5.29) $$\lambda(\bar{v}) > \lambda(\bar{u}) = \lambda_1$$

et

$$J(\bar{v}) = J(1) = \text{Inf } \mathcal{P}\ .$$

Par suite $\bar{v}$ est solution de $\mathcal{Q}$ et donc de $\mathcal{P}$ ce qui impose

$$\lambda(\bar{v}) = \lambda_1\ .$$

Cette relation contredit (5.29).

Remarque 5.2. L'équivalence des problèmes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ n'étant pas complète nous ferons dans le paragraphe 7 une étude du problème $\mathcal{R}$ indépendante de l'étude du

problème $\mathcal{P}$.

6 - ETUDE DES PROBLEMES $\mathcal{P}_{\alpha,\beta}$.

On revient aux hypothèses et notations du paragraphe 2. On va introduire les problèmes suivants :

$$\mathcal{Q}_{\alpha,\beta} \qquad \inf_{\substack{u\in C_{\alpha,\beta} \\ \lambda(u)\geq\lambda_1}} J(u) \ .$$

Si l'on pose

$$u_\alpha(x) \equiv \alpha \quad \forall\, x \in \Omega \ , \tag{6.1}$$

d'après (2.1), (2.10) on a

$$J(u_\alpha) < J(u) \quad \text{pour tout} \quad u \in C_{\alpha,\beta}\, u \neq u_\alpha \ . \tag{6.2}$$

Proposition 6.1. Si on suppose de plus que

$$\lambda(u_\alpha) < \lambda_1 \tag{6.3}$$

$$\exists\, u_\gamma \in C_{\alpha,\beta} \ \text{tel que} \ \lambda(u_\gamma) > \lambda_1 \tag{6.4}$$

alors

(i) les problèmes $\mathcal{P}_{\alpha,\beta}$ et $\mathcal{Q}_{\alpha,\beta}$ sont équivalents

(ii) $\bar{u} \in C_{\alpha,\beta}$ est solution du problème $\mathcal{P}_{\alpha,\beta}$ ou $\mathcal{Q}_{\alpha,\beta}$

si et seulement si

$$\lambda(\bar{u}) = \lambda_1 \tag{6.5}$$

et

$$\begin{cases} \exists\, \eta < 0 \ \text{tel que} \\ J(v) - J(\bar{u}) + \eta\, \lambda'(\bar{u}).(v-\bar{u}) \geq 0 \quad \forall\, v \in C_{\alpha,\beta} \end{cases} \tag{6.6}$$

(iii) l'ensemble $S(\mathcal{P}_{\alpha,\beta})$ des solutions du problème $\mathcal{P}_{\alpha,\beta}$ est convexe

et $w(u)$ est indépendant de u pour $u \in S(\mathcal{P}_{\alpha,\beta})$.

(iv) Si $\beta < +\infty$ alors le problème $\mathcal{P}_{\alpha,\beta}$ admet au moins une solution.

Démonstration : Par application de la Proposition 5.1 et du Corollaire 5.1, on obtient (i) et (ii).

Posons $S = S(\mathcal{P}_{\alpha,\beta})$. Soient $(\bar{u},\bar{v}) \in S \times S$ et $\xi \in [0,1]$ on pose

$$u(\xi) = \xi\bar{u} + (1-\xi)\bar{v} \quad ,$$

J étant linéaire, on a

$$J(u(\xi)) = \text{Inf } \mathcal{P}_{\alpha,\beta} \ .$$

D'autre part, puisque λ est pseudoconcave on a

$$\lambda(u(\xi)) \geq \text{Min}(\lambda(\bar{u}),\lambda(\bar{v})) = \lambda_1 \ .$$

Et par suite $u(\xi)$ est solution du problème $\mathcal{Q}_{\alpha,\beta}$ et donc de $\mathcal{P}_{\alpha,\beta}$. D'où

$$\lambda(\xi\bar{u} + (1-\xi)\bar{v}) = \lambda_1 \qquad \forall\, \xi \in [0,1] \ ,$$

ce qui implique

$$\lambda'(\bar{v})(\bar{u} - \bar{v}) = 0 \ . \tag{6.7}$$

On pose

$$w_1 = w(\bar{u}) \quad \text{et} \quad w_2 = w(\bar{v}) \ .$$

La relation (6.7), compte tenu de (2.3), devient

$$\int_\Omega a'(\bar{v}).(\bar{u}-\bar{v})(x) \ |\nabla w_2(x)|^2 \, dx = \lambda_1 \int_\Omega b'(\bar{v}).(\bar{u}-\bar{v})(x) \ w_2^2(x) \, dx \ . \tag{6.8}$$

Ce qui donne

$$\int_\Omega (a(\bar{u}) - a(\bar{v}))(x) \ |\nabla w_2(x)|^2 \leq \lambda_1 \int_\Omega (b(\bar{u}) - b(\bar{v}))(x) \ w_2^2(x) \, dx$$

puisque a est concave et b convexe. Par suite II(1.19) implique

$$<A_{\bar{u}} w_2, w_2> \leq \lambda_1 (B_{\bar{u}} w_2, w_2) .$$

Et donc w_2 est un vecteur propre associé à $\bar{u}$ et λ_1. Ce qui implique, d'après la Proposition II.1.1,

$$w_2 = w_1 .$$

Cela termine la démonstration de (iii).

Démontrons la propriété (iv). $C_{\alpha,\beta}$ est un convexe faible* fermé de $L^\infty(\Omega)$, et comme $\beta < +\infty$, il est faible* compact. Posons

$$K = \{u \in C_{\alpha,\beta} \; ; \; \lambda(u) \geq \lambda_1\} .$$

D'après (2.11) K est faible* compact. J étant faiblement-* continue sur $L^\infty(\Omega)$ atteint donc son minimum en au moins un point de K. ∎

Proposition 6.2. (Mêmes hypothèses que dans la Proposition 6.1.

Si a et b sont définies par des fonctions $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ alors la relation (6.6) est équivalente à :

$$\exists\, e > 0 \text{ vérifiant}$$

$$g(\bar{u};x) \leq e \quad \text{p.p. } x \in \Omega_\beta = \{x \in \Omega ; \bar{u}(x) < \beta\} \tag{6.9}$$

et

$$g(\bar{u};x) \geq e \quad \text{p.p. } x \in \Omega_\alpha = \{x \in \Omega ; \bar{u}(x) > \alpha\} \tag{6.10}$$

où

$$g(\bar{u};x) = \mathfrak{a}'(\bar{u}(x)) \left|\nabla w(\bar{u};x)\right|^2 - \lambda_1 \mathfrak{b}'(u(x)) \, w^2(\bar{u};x) . \tag{6.11}$$

Démonstration : On pose

$$e = - \frac{\int_\Omega \mathfrak{b}(\bar{u}(x)) \, w^2(\bar{u};x) \, dx}{\eta} . \tag{6.12}$$

La relation (6.6) s'écrit alors :

$$(6.13) \qquad \int_\Omega \{e - g(\bar{u};x)\}\{v(x) - \bar{u}(x)\}\, dx \geqslant 0 \quad \forall\, v \in C_{\alpha,\beta} .$$

Supposons que (6.9) ne soit pas vérifiée. Alors on peut considérer une partie Ω_1 de Ω_β , de mesure non nulle, telle que

$$(6.14) \qquad \{e - g(\bar{u};x)\} < 0 \qquad \text{p.p. } x \in \Omega_1$$

$$\bar{u}(x) \leqslant \beta_1 < \beta \qquad \text{p.p. } x \in \Omega_1 .$$

Si l'on prend dans (6.13), comme fonction v , la fonction

$$v(x) = \begin{cases} \bar{u}(x) & \text{sur } \Omega_1 \setminus \Omega \\ \bar{u}(x) + \dfrac{\beta - \beta_1}{2} & \text{sur } \Omega_1 \end{cases}$$

on obtient

$$\int_{\Omega_1} \{e - g(\bar{u};x)\}\, dx \geqslant 0 ;$$

ce qui contredit (6.14).

On démontrerait de la même façon (6.10) . ∎

Si $\beta = +\infty$ les relations se simplifient et on obtient

<u>Corollaire 6.1</u>. <u>Si</u> $\beta = +\infty$, <u>la relation</u> (6.6) <u>est équivalente à</u>

$\exists\ e > 0$ <u>vérifiant</u>

$$(6.15) \qquad g(\bar{u};x) \leqslant e \quad \text{p.p. } x \in \Omega$$

$$(6.16) \qquad (g(\bar{u};x) - e)(\bar{u}(x) - \alpha) = 0 \quad \text{p.p. } x \in \Omega$$

<u>où</u> g <u>est définie par</u> (6.11).

On pose

$$(6.17) \qquad \mathcal{L}(u,p) = J(u) + p(\lambda(u) - \lambda_1) .$$

Proposition 6.3. Sous les mêmes hypothèses que dans la Proposition 6.1 et si l'on suppose que :

$$u \longrightarrow \mathcal{L}(u,p) \quad \text{est quasiconvexe pour tout} \quad p \leq 0$$

alors $\bar{u} \in C_{\alpha,\beta}$ est solution du problème $\mathcal{P}_{\alpha,\beta}$ (ou $\mathcal{Q}_{\alpha,\beta}$) si et seulement si $(\bar{u},\bar{p})$ est point selle sur $C_{\alpha,\beta} \times \mathbb{R}_-$ de $\mathcal{L}(u,p)$. De plus on a $\bar{p} < 0$.

Démonstration : Le résultat énoncé, sauf $\bar{p} \neq 0$, est obtenu par application de la Proposition 5.4.

Si $\bar{p} = 0$ alors on a

$$J(\bar{u}) \leq J(v) \quad \forall\, v \in C_{\alpha,\beta}$$

ce qui est en contradiction avec (6.3), (6.2). ∎

Corollaire 6.2. (Mêmes hypothèses que la Proposition 6.3). Soit $\bar{u} \in C_{\alpha,\beta}$ alors $\bar{u}$ est solution du problème $\mathcal{P}_{\alpha,\beta}$ (ou $\mathcal{Q}_{\alpha,\beta}$) si et seulement si

(6.18) $$\lambda(\bar{u}) \geq \lambda_1$$

et $\exists\, \bar{p}$ vérifiant

(6.19) $$\bar{p} \leq 0$$

(6.20) $$J(\bar{u}) \leq J(v) + \bar{p}(\lambda(v) - \lambda_1) \;,\; \forall\; v \in C_{\alpha,\beta}$$

Démonstration : La Proposition 6.3 montre que la condition est nécessaire.

Montrons que la condition est suffisante. Soit $v \in C_{\alpha,\beta}$ vérifiant la contrainte

$$\lambda(v) \geq \lambda_1$$

alors (6.19) et (6.20) montrent que :

$$J(\bar{u}) \leq J(v)$$

et donc $\bar{u}$ est solution du problème $\mathcal{Q}_{\alpha,\beta}$ et donc du problème $\mathcal{P}_{\alpha,\beta}$. ∎

Remarque 6.1. Une condition nécessaire pour que $(\bar{u},\bar{p})$ soit point selle de $\mathcal{L}(u,p)$ sur $C_{\alpha,\beta} \times \mathbb{R}_-$ est

$$J(v) - J(\bar{u}) + \bar{p}\,\lambda'(\bar{u}).(v-\bar{u}) \geqslant 0 \quad \forall\, v \in C_{\alpha,\beta} .$$

Par conséquent $\bar{p}$ est l'une des constantes η de la Proposition 6.1. Et par suite, si η existe et est unique alors le problème $\mathcal{Q}^*_{\alpha,\beta}$ admet une seule solution.

Application 6.1. Exemple 1. On a

$$\lambda(u_\alpha) = \alpha\,\lambda_1$$

et donc, d'après (2.7) , $\lambda(u_\alpha) < \lambda_1$.

Si l'on choisit

(6.21) $$1 < \gamma < \beta$$

et si l'on pose

(6.22) $$u_\gamma(x) \equiv \gamma \quad \forall\, x \in \Omega$$

on a

$$\lambda(u_\gamma) = \gamma\,\lambda_1 > \lambda_1 .$$

Donc les hypothèses (6.3) et (6.4) sont vérifiées. On va pouvoir par conséquent appliquer les résultats qui précédent en distinguant les deux cas $\beta < +\infty$ et $\beta = +\infty$:

1er cas. $\beta < +\infty$.

Le problème $\mathcal{P}_{\alpha,\beta}$ admet une solution au moins.

Soit $\bar{u} \in C_{\alpha,\beta}$ vérifiant (6.5), $\bar{u}$ est solution du problème $\mathcal{P}_{\alpha,\beta}$ si et seulement si $\exists\, e > 0$ tel que

(6.23) $$|\nabla w(\bar{u}(x);x)|^2 \leqslant e \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega_\beta$$

et

(6.24) $$|\nabla w(\bar{u}(x);x)|^2 \geqslant e \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega_\alpha .$$

Nous allons montrer que cette constante e est indépendante de la solution $\bar{u}$.

Soit $\bar{v}$ une autre solution du problème $\mathcal{P}_{\alpha,\beta}$. Alors d'après la Proposition 6.1 on a

$$w(\bar{v}) = w(\bar{u}) .$$

De plus $\exists\ e' > 0$ tel que

$$|\nabla w(\bar{u}(x);x)|^2 \leq e' \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega'_\beta = \{x;\bar{v}(x) < \beta\}$$

et

$$|\nabla w(\bar{u}(x);x)|^2 \geq e' \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega'_\alpha = \{x;\bar{v}(x) > \alpha\} .$$

Posons

$$\Omega_1 = \{x;\bar{u}(v) > \bar{v}(x)\} ,$$

$$\Omega_2 = \{x;\bar{v}(x) > \bar{u}(x)\} .$$

Constatons que si $\bar{u}$ est différent de $\bar{v}$ alors mes Ω_1 et mes Ω_2 sont différentes de zéro puisque

$$\int_\Omega \bar{u}(x)\ dx = \int_\Omega \bar{v}(x)\ dx .$$

D'autre part on a

$$x \in \Omega_1 \implies x \in \Omega_\alpha \cap \Omega'_\beta \implies e \leq |\nabla w(u(x);x)|^2 \leq e' \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega_1$$

et

$$x \in \Omega_2 \implies x \in \Omega'_\alpha \cap \Omega_\beta \implies e' \leq |\nabla w(u(x);x)|^2 \leq e \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega_2 .$$

Toutes ces inégalités impliquent

$$e = e' .$$

2ème cas. $\beta = +\infty$.

On ne sait pas si le problème $\mathcal{P}_\alpha$ admet une solution mais on sait caractériser cette solution. Soit $\bar{u} \in C_{\alpha,\beta}$ vérifiant (6.5), $\bar{u}$ est une solution du

problème $\mathcal{P}_\alpha$ si et seulement si

$$\exists\ e > 0 \quad \text{tel que}$$

$$|\nabla w(\bar{u}(x);x)|^2 \leqslant e \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega \tag{6.25}$$

$$(|\nabla w(\bar{u}(x);x)|^2 - e)(\bar{u}(x) - \alpha) = 0 \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega\ . \tag{6.26}$$

De même que dans le cas précédent on montrerait que e est indépendante de la solution $\bar{u}$ de $\mathcal{P}_\alpha$.

Application 6.2. Exemple 3.

On a

$$\lambda(u_\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha+\delta}(1+\delta)\ \lambda_1 < \lambda_1\ .$$

On considère toujours la même fonction u_γ définie par (6.22) avec γ vérifiant (6.21). On a

$$\lambda(u_\gamma) = \frac{\gamma}{\alpha+\delta}(1+\delta)\ \lambda_1 > \lambda_1\ .$$

Par application des résultats obtenus dans ce paragraphe on obtient :

1er cas . $\beta < +\infty$.

Le problème $\mathcal{P}_{\alpha,\beta}$ admet une solution au moins.
Soit $\bar{u} \in C_{\alpha,\beta}$ vérifiant (6.5), $\bar{u}$ est une solution du problème $\mathcal{P}_{\alpha,\beta}$ si et seulement si $\exists\ e > 0$ tel que

$$|\nabla w(\bar{u}(x);x)|^2 - \lambda_1\, w^2(\bar{u}(x);x) \leqslant e \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega_\beta \tag{6.27}$$

$$|\nabla w(\bar{u}(x);x)| \quad - \lambda_1\, w^2(\bar{u}(x);x) \geqslant e \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega_\alpha. \tag{6.28}$$

Comme dans l'Application 6.1. on peut montrer que cette constante est unique.

2ème cas . $\beta = +\infty$.

On ne sait pas si l'on a existence de solutions du problème $\mathcal{P}_\alpha$. La

condition nécessaire et suffisante est la même, l'inégalité (6.28) étant remplacée par une égalité. C'est l'exemple que nous avions traité dans [9] mais nous n'avions pas démontré que e était strictement positive. L'idée de comparer les problèmes $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{P}$ est due à D. SERRE.

Remarque 6.2. Dans les deux exemples qui précèdent, la condition nécessaire et suffisante pour que $\bar{u}$ soit solution de $\mathcal{P}_{\alpha,\beta}$ ne dépendait pas explicitement de $\bar{u}$ car a et b étaient des fonctions affines de $\bar{u}$. Nous allons maintenant traiter un exemple où il n'en n'est plus ainsi.

Application 6.3. Exemple 4.

Les fonctions u_α et u_γ vérifient

$$\lambda(u_\alpha) = \alpha^2 \lambda_1 < \lambda_1 ,$$

$$\lambda(u_\gamma) = \gamma^2 \lambda_1 > \lambda_1 .$$

Enonçons les résultats obtenus :

1er cas. $\beta < +\infty$.

Le problème $\mathcal{P}_{\alpha,\beta}$ admet une et une seule solution $\bar{u}$ caractérisée par la condition suivante

$$\exists\ e > 0 \quad \text{tel que}$$

$$\frac{w^2(\bar{u}(x);x)}{\bar{u}^3(x)} \leqslant e \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega_\beta \tag{6.29}$$

$$\frac{w^2(\bar{u}(x);x)}{\bar{u}^3(x)} \geqslant e \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega_\alpha . \tag{6.30}$$

Le problème $\mathcal{Q}^*_{\alpha,\beta}$, dual de $\mathcal{Q}_{\alpha,\beta}$, admet une et une seule solution $\bar{p}$ vérifiant

$$\bar{p} = - e^{-1} \int_\Omega \frac{w^2(\bar{u}(x);x)}{\bar{u}^3(x)}\, dx . \tag{6.31}$$

2ème cas. $\beta = +\infty$.

Si le problème $\mathcal{P}_\alpha$ admet une solution celle-ci est unique et elle est caractérisée par la même condition ; (6.30) étant remplacée par une égalité.

Seule l'unicité de la solution reste à montrer. Soit $\bar{v}$ une seconde solution de $\mathcal{P}_{\alpha,\beta}$ alors $\exists\, e' > 0$ tel que

$$\frac{w^2(\bar{u}(x);x)}{\bar{v}^3(x)} \leqslant e' \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega'_\beta = \{x;\bar{v}(x) < \beta\} \tag{6.32}$$

$$\frac{w^2(\bar{u}(x);x)}{\bar{v}^3(x)} \geqslant e' \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega'_\alpha = \{x;\bar{v}(x) > \alpha\} \ . \tag{6.33}$$

Posons

$$\Omega_1 = \{x;\bar{u}(x) > \bar{v}(x)\} \ ,$$

$$\Omega_2 = \{x;\bar{u}(x) < \bar{v}(x)\} \ .$$

Supposons $\bar{u} \neq \bar{v}$, alors les ensembles Ω_1 et Ω_2 sont de mesures non nulles.

D'autre part, comme $\Omega_1 \subset \Omega_\alpha \cap \Omega'_\beta$, on a

$$e\ \bar{u}^3(x) \leqslant w^2(\bar{u}(x);x) \leqslant e'\ \bar{v}^3(x) \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega_1$$

et l'on en déduit que

$$e < e' \ .$$

De même comme $\Omega_2 \subset \Omega'_\alpha \cap \Omega_\beta$ on a

$$e' < e \ .$$

On arrive ainsi à une contradiction.

$(e,\bar{u})$ étant unique, la relation (6.12) montre que η est unique ainsi que $\bar{p}$ d'après la Remarque 6.2.

7 - ETUDE DES PROBLEMES $\mathcal{R}_{\alpha,\beta}$.

Sous les hypothèses de la section 2 on a le résultat suivant :

Proposition 7.1. Soit $\bar{u} \in C_{\alpha,\beta}$ vérifiant la contrainte

$$J(\bar{u}) = J_1 \ , \tag{7.1}$$

alors $\bar{u}$ est solution du problème $\mathcal{R}_{\alpha,\beta}$ si et seulement si il existe $\eta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lambda'(\bar{u}).(v-\bar{u}) + \eta(J(v) - J(\bar{u})) \leq 0 \quad \forall\, v \in C_{\alpha,\beta}. \tag{7.2}$$

(ii) L'ensemble $S(\mathcal{R}_{\alpha,\beta})$ des solutions du problème $S_{\alpha,\beta}$ est convexe et $w(u)$ est indépendant de u pour $u \in S(\mathcal{R}_{\alpha,\beta})$.

(iii) Si $\beta < +\infty$ le problème $\mathcal{R}_{\alpha,\beta}$ admet au moins une solution.

Démonstration : D'après les résultats d'HALKIN [7], on sait que : $\exists\, (\mu_o,\mu_1) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$(\mu_o,\mu_1) \neq (0,0) \tag{7.3}$$

$$\mu_1 \leq 0 \tag{7.4}$$

$$-\mu_1 \lambda'(u).(v-\bar{u}) + \mu_o J((\bar{u}).(v-\bar{u}) \leq 0 \quad \forall\, v \in C_{\alpha,\beta} \ . \tag{7.5}$$

Si $\mu_1 = 0$ alors (7.5) s'écrit

$$\mu_o(J(v) - J(\bar{u})) \leq 0 \quad \forall\, v \in C_{\alpha,\beta} \ .$$

Si $\mu_o < 0$ cela implique

$$J(v) \geq J(\bar{u}) = J_1 \quad \forall\, v \in C_{\alpha,\beta} \ .$$

Tandis que, si $\mu_o > 0$, cela implique

$$J(v) \leqslant J(\bar{u}) = J_1 \quad \forall\, v \in C_{\alpha,\beta} \ .$$

Dans les deux cas c'est incompatible avec la définition de J et de $C_{\alpha,\beta}$. Par suite on a

$$\mu_1 < 0 \ .$$

Et donc (7.5) implique (7.2).

Réciproquement soient $\bar{u} \in C_{\alpha,\beta}$ et $\eta \in \mathbb{R}$ vérifiant (7.1) et (7.2). Soit $v \in C_{\alpha,\beta}$ vérifiant la contrainte (7.1) alors (7.2) s'écrit :

$$\lambda'(u).(v-u) \leqslant 0 \ .$$

Et donc, puisque λ est pseudoconcave

$$\lambda(v) \leqslant \lambda(\bar{u}) \ .$$

Cela termine la démonstration de (i).

Démontrons la propriété (ii). On pose $S = S(\mathcal{R}_{\alpha,\beta})$.
Soit $(\bar{u},\bar{v}) \in S \times S$ et $\xi \in [0,1]$. Soit

$$u(\xi) = \xi\, \bar{u} + (1-\xi)\, \bar{v} \ .$$

On a

$$u(\xi) \in C_{\alpha,\beta}$$

$$J(u(\xi)) = J_1 \qquad (J \text{ étant linéaire})$$

et

$$\lambda(u(\xi)) \geqslant \text{Min}(\lambda(\bar{u}),\lambda(\bar{v})) = \text{Sup}\ \mathcal{R}_{\alpha,\beta} \ .$$

Par conséquent $u(\xi)$ est solution du problème $\mathcal{R}_{\alpha,\beta}$. On termine alors la démonstration comme dans le cas de la Proposition 6.1.

Le résultat (iii) est évident puisque on maximise une fonction faible -* s.c.s. sur un compact faible-* de $L^{\infty}(\Omega)$.

Proposition 7.2. Si a et b sont définies par des fonctions $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{b}$ alors la relation (7.2) est équivalente à

$$\exists\ e \in \mathbb{R} \text{ vérifiant (6.9) et (6.10)}$$

où g est définie par

$$g(\bar{u}(x),x) = \mathfrak{A}'(\bar{u}(x))\,|\nabla w(\bar{u}(x),x)|^2 - \lambda(u)\,\mathfrak{b}'(u(x))\,w^2(u(x);x)\ . \tag{7.6}$$

Démonstration : On fait la démonstration comme dans le cas de la Proposition 6.2 mais (6.12) est remplacée par

$$e = -\eta \int_\Omega \mathfrak{b}(\bar{u}(x))\,w^2(\bar{u}(x),x)\,dx\ . \tag{7.7}$$

∎

Application 7.1. Exemple 4.

On peut appliquer les résultats qui précèdent et par conséquent si $\bar{u} \in C_{\alpha,\beta}$ et vérifie (7.1), $\bar{u}$ est solution du problème $\mathcal{R}_{\alpha,\beta}$ si et seulement si

$$\exists\ e \in \mathbb{R} \text{ tel que}$$

$$\frac{w^2(\bar{u}(x);x)}{\bar{u}^3(x)} \leqslant e \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega_\beta \tag{7.8}$$

$$\frac{w^2(\bar{u}(x);x)}{\bar{u}^3(x)} \geqslant e \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega_\alpha\ . \tag{7.9}$$

Comme $u(x) \equiv \beta$ n'est pas solution de $\mathcal{R}_{\alpha,\beta}$, on en déduit que mes $\Omega_\beta \neq 0$ et donc (7.8) implique

$$e > 0\ .$$

On démontrerait comme dans le cas de l'application 6.3, que l'existence d'une solution implique l'unicité de cette solution. Et par conséquent si $\beta < +\infty$ on a existence et unicité de solution du problème $\mathcal{R}_{\alpha,\beta}$.

Nous allons appliquer les résultats du paragraphe 5 au problème, c'est pourquoi nous supposerons que

$$\beta < +\infty\ . \tag{7.10}$$

Et nous allons considérer les fonctions u_α définie par (6.1) et u_β définie par

(7.11) $$u_\beta(x) \equiv \beta \quad .$$

Ces fonctions vérifient

(7.12) $$J(u_\alpha) < J(u) < J(u_\beta) \quad \text{pour tout} \quad u \in C_{\alpha,\beta} \quad , u \neq u_\beta \quad \text{et} \quad u \neq u_\alpha$$

Nous supposerons que

(7.13) $$\lambda(u_\beta) > \lambda(u) \quad \text{pour tout} \quad u \in C_{\alpha,\beta} \quad , u \neq u_\beta \quad .$$

On introduit le problème :

$$\mathcal{S}_{\alpha,\beta} \qquad \sup_{\substack{u \in C_{\alpha,\beta} \\ J(u) \leq J_1}} \lambda(u) \quad .$$

Constatons que les hypothèses (5.3) et (5.8) sont vérifiées. En effet

$$\exists\, u_\beta \in C \quad \text{tel que} \quad J(u_\beta) > J_1 \quad \text{et pour tout} \quad u \in C_{\alpha,\beta} \quad u \neq u_\beta \,, \quad \lambda(u) < (u_\beta)$$

et

$$\exists\, u_\alpha \in C \quad \text{tel que} \quad J(u_\alpha) < J_1 \quad .$$

D'où

Proposition 7.3. Sous les hypothèses (7.10), (7.13) alors

(i) les problèmes $\mathcal{R}_{\alpha,\beta}$ et $\mathcal{S}_{\alpha,\beta}$ sont équivalents ;

(ii) la constante n intervenant dans (7.2) est positive .

Application 7.1. Exemple 4. (suite).

Montrons que, si β vérifie (7.10) alors on a (7.13).

Soit $u \in C_{\alpha,\beta}$, $u \neq u_\beta$, on a, d'après II.(1.12), II.(5.11),

$$\lambda(u) \leq \frac{\int_\Omega |\nabla w(u_\beta,x)|^2 \, dx}{\int_\Omega \frac{w^2(u_\beta,x)}{u^2(x)} \, dx} < \lambda(u_\beta) \ .$$

Ce qui démontre (7.13).

-:-

IV - DISCRETISATION DES PROBLEMES PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS.

Dans tout ce chapitre on suppose que les hypothèses de la section III.2 ainsi que III.(6.3) et III.(6.4) sont vérifiées ; a et b étant définies par des applications $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ de $]0,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$. D'autre part on supposera, bien que cela ne soit pas nécessaire, que le domaine Ω est à frontière polygonale. Enfin nous ne traiterons que l'approximation des problèmes $\mathcal{P}_{\alpha,\beta}$, les problèmes $\mathcal{R}_{\alpha,\beta}$ pouvant être résolus par des méthodes semblables.

1 - APPROXIMATION DES ESPACES.

Soit $\mathcal{C}_h$ une triangulation de Ω . On suppose que cette triangulation vérifie les hypothèses habituelles suivantes : (cf. CIARLET [4], STRANG et FIX [21])

(i) la réunion des triangles fermés de $\mathcal{C}_h$ est $\overline{\Omega}$,

(ii) tout triangle de $\mathcal{C}_h$ a un diamètre inférieur ou égal à h ,

(iii) deux triangles de $\mathcal{C}_h$ ont, soit une intersection vide, soit une intersection réduite à un côté commun ou à un sommet commun,

(iv) $\mathcal{C}_h$ est une suite régulière de triangulations de Ω , c'est-à-dire si $\underline{\theta}(h)$ est le plus petit des angles de tous les triangles de $\mathcal{C}_h$ on a

$$\underline{\theta}(h) \geqslant \underline{\theta} > 0 \quad \text{pour tout} \quad h ,$$

(v) si mes $\Gamma_2 \neq 0$ alors les extrémités communes de Γ_1 et Γ_2 sont des noeuds de la triangulation. Et elle vérifie l'hypothèse supplémentaire suivante :

(vi) si $\overline{\theta}(h)$ est le plus grand des angles de tous les triangles de $\mathcal{C}_h$ on a

$$\overline{\theta}(h) \leq \frac{\pi}{2} .$$

On désigne par s_1 , s_2 , ... , s_M les sommets de la triangulation, par $\mathcal{S}_h$ l'ensemble de ces sommets et par T_1, T_2,..., T_p les triangles $\mathcal{C}_h$. Si N est le nombre de sommets de la triangulation $\mathcal{C}_h$ non situé sur Γ_1 , on peut supposer,

sans nuire à la généralité, que ces sommets sont $s_1, s_2, \ldots, s_N$.

Soit W_h l'ensemble des fonctions affines sur chaque triangle de $\mathcal{C}_h$, continues sur $\overline{\Omega}$ et nulles sur Γ_1 . On a donc

$$W_h \subset W \tag{1.1}$$

et

$$\dim W_h = N .$$

On désignera par $\phi_{1,h}$, $\phi_{2,h}$, ..., $\phi_{N,h}$ la base habituelle de W_h et par $w_1, w_2, \ldots, w_N$ les composantes suivant cette base d'un vecteur w_h de W_h . On a donc les relations

$$\phi_{i,h}(s_j) = \delta_{i,j} \qquad 1 \leq i \leq N , \qquad 1 \leq j \leq N \tag{1.2}$$

$$w_h = \sum_{i=1}^{N} w_i \, \phi_{i,h} . \tag{1.3}$$

On écrira (1.3) sous la forme

$$w_h = (w_i) .$$

Pour tout $w \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}) \cap W$ on définit

$$r_h w = w_h$$

où w_h est la fonction de W_h telle que

$$w_h(s_j) = w(s_j) \qquad j = 1, \ldots, M .$$

On a d'après [25]

Lemme 1.1. Pour tout $w \in W$ et tout $h>0$ il existe $w_h \in W_h$ telle que si $w \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, $w_h = r_h w$ et w_h converge vers w dans W quand h tend vers 0 .

On va maintenant approximer en un sens faible le convexe $C_{\alpha,\beta}$ de $L^\infty(\Omega)$. Soit U_h l'ensemble des fonctions constantes sur chaque triangle de $\mathcal{C}_h$. L'ensemble

(χ_h) des fonctions caractéristiques de ces triangles forme une base de U_h . On a

$$u_h(x) = \sum_{k=1}^{P} u_k \chi_k(x) \tag{1.4}$$

que l'on notera

$$u_h = (u_k) .$$

On pose

$$C_{h,\alpha,\beta} = C_{\alpha,\beta} \cap U_h .$$

Pour tout $u \in C_{\alpha,\beta}$ on définit

$$q_h u = u_h = (u_k) \tag{1.5}$$

où

$$u_k = \frac{1}{\text{aire } T_k} \int_{T_k} u(x)\, dx \qquad k = 1,\ldots,P . \tag{1.6}$$

Lemme 1.2. Pour tout $u \in C_{\alpha,\beta}$, $q_h u$ converge vers u dans $L^1(\Omega)$ pour la topologie forte et $q_h u$ converge vers u dans $L^\infty(\Omega)$ pour la topologie $\sigma(L^\infty, L^1)$ si $\beta < +\infty$.

Démonstration : On démontre facilement que

$$q_h u \longrightarrow u \text{ dans } L^1(\Omega) \text{ fort} .$$

D'autre part $q_h u \in C_{\alpha,\beta}$ donc $q_h u$ est borné dans $L^\infty(\Omega)$, par suite

$$q_h u \longrightarrow u \text{ dans } L^\infty(\Omega) . \quad \blacksquare$$

Notation. On désignera par $M_m(\mathbb{R})$ l'anneau des matrices carrées d'ordre m à coefficients réels. On notera par $(\, ,)_e$ le produit scalaire habituel de $\mathbb{R}^m$

$$(x,y)_e = \sum_{i=1}^{m} x_i \, y_i ,$$

l'orthogonalité par rapport à ce produit scalaire sera noté $\perp\!\!\!\perp$.

2 - APPROXIMATION DU PROBLEME SPECTRAL.

On va approximer le problème spectral par :

trouver $(w_h,\lambda_h) \in W_h \times \mathbb{R}$ tel que

$$(2.1)\qquad \int_\Omega a(u_h)(x)\ \nabla w_h(x).\nabla \phi_h(x)\ dx = \lambda_h \int_\Omega b(u_h)(x)\ w_h(x)\ \phi_h(x)\ dx \quad \forall\ \phi_h \in W_h\ .$$

Le système (2.1) s'écrit :

$$(2.2)\qquad \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(u_h)\ w_j = \lambda_h \sum_{j=1}^{N} b_{ij}(u_h)\ w_j \qquad \forall\ i = 1,\dots,N$$

où

$$(2.3)\qquad a_{ij}(u_h) = \int_\Omega a(u_h)(x)\ \nabla \phi_{i,h}(x)\cdot \nabla \phi_{j,h}(x)\ dx$$

$$(2.4)\qquad b_{ij}(u_h) = \int_\Omega b(u_h)(x)\ \phi_{i,h}(x)\ \ \phi_{j,h}(x)\ dx\ ,$$

ce qui s'écrit :

$$(2.5)\qquad a_{ij}(u_h) = \sum_{k=1}^{P} a(u_k) \int_{T_K} \nabla \phi_{i,h}(x)\cdot \nabla \phi_{j,h}(x)\ dx$$

$$(2.6)\qquad b_{i,j}(u_h) = \sum_{k=1}^{P} b(u_k) \int_{T_K} \phi_{i,h}(x)\ \phi_{j,h}(x)\ dx\ .$$

On pose

$$(2.7)\qquad \hat{A}_{u_h} = (a_{ij}(u_h)) \in M_N(\mathbb{R})$$

$$(2.8)\qquad \hat{B}_{u_h} = (b_{ij}(u_h)) \in M_N(\mathbb{R})\ .$$

Le problème spectral (2.2) s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$(2.9)\qquad \hat{A}_{u_h}\ w_h = \lambda_h\ \hat{B}_{u_h}\ w_h\ .$$

Les matrices $\hat{A}_{u_h}$ et $\hat{B}_{u_h}$ sont symétriques définies positives. Par conséquent le problème spectral (2.9) est classique. On sait qu'il admet N valeurs propres strictement positives et que les sous-espaces propres sont orthogonaux par rapport au produit scalaire défini par $\hat{B}_{u_h}$ ou par $\hat{A}_{u_h}$. Désignons par $\lambda_h(u_h)$ la plus

petite valeur propre, on a

$$(2.10)\qquad \lambda_h(u_h) = \inf_{\substack{w_h \in W_h \\ w_h \neq o}} \frac{(\hat{A}_{u_h} w_h, w_h)_e}{(\hat{B}_{u_h} w_h, w_h)_e} = \inf_{\substack{w_h \in W_h \\ w_h \neq o}} \frac{\int_\Omega a(u_h)(x)\ |\nabla w_h(x)|^2\ dx}{\int_\Omega b(u_h)(x)\ w_h^2(x)\ dx} .$$

Lemme 2.1. Il existe un et un seul couple $(\lambda_h(u_h), w_h(u_h)) \in \mathbb{R} \times W_h$ vérifiant (2.9),

$$(2.11)\qquad w_k(u_h) \geq 0 \qquad \left[w_h(u_h) = (w_k(u_h))\right]$$

et

$$(2.12)\qquad \int_\Omega w_h^2(u_h;x)\ dx = 1 .$$

De plus $\lambda_h(u_h)$ est la plus petite valeur propre du problème (2.9), elle est simple, elle vérifie

$$(2.13)\qquad \lambda_h(u_h) = \frac{(\hat{A}_{u_h} w_h(u_h), w_h(u_h))_e}{(\hat{B}_{u_h} w_h(u_h), w_h(u_h))_e}$$

et enfin on a

$$(2.14)\qquad \forall\ k = 1,\ldots,N \qquad w_k(u_h) > 0 .$$

Démonstration : On a unicité parceque les sous-espaces propres sont orthogonaux par rapport au produit scalaire défini par $\hat{B}_{u_h}$.

L'existence et les propriétés énoncées découleront du Théorème de Perron-Frobenius appliqué à la matrice

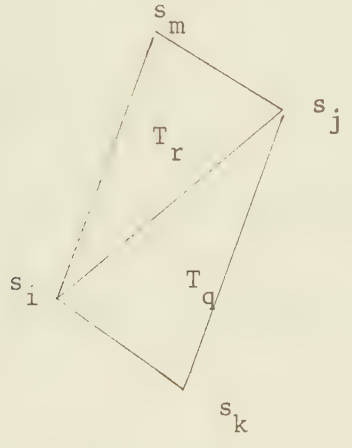
$$\hat{C}_{u_h} = (\hat{A}_{u_h})^{-1}\ \hat{B}_{u_h}$$

parceque l'on a le résultat suivant :

Lemme 2.2. La matrice C_{u_h} est une matrice strictement positive (c'est-à-dire les éléments de cette matrice sont strictement positifs).

Démonstration : Nous allons montrer que les éléments non situés sur la diagonale de $\hat{A}_{u_h}$ sont négatifs ou nuls.

Les seuls éléments à considérer sont $a_{ij}(u_h)$ dans le cas où $s_i\, s_j$ est un côté d'un des triangles de $\mathcal{C}_h$.



Dans ce cas-là on a d'après (2.5)

$$a_{ij}(u_h) = -\frac{\overrightarrow{s_k s_i}\ \overrightarrow{s_k s_j}}{2}\, a(u_q) - \frac{\overrightarrow{s_m s_i}\ \overrightarrow{s_m s_j}}{2}\, a(u_r)$$

ce qui, d'après l'hypothèse (vi) que l'on a faite, montre que

$$a_{ij}(u_h) = \begin{cases} 0 & \text{si } \widehat{s_i s_k s_j} = \widehat{s_i s_m s_j} = \dfrac{\pi}{2} \\ < 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarquons que si $a_{ij}(u_h) = 0$ alors $a_{im}(u_h) \neq 0$ et $a_{mj}(u_h) \neq 0$.

On va maintenant montrer que $\hat{A}_{u_h}$ est irréductible.

Ω étant connexe cela implique que

$$\forall (s_j, s_k) \in \mathcal{S}_h \times \mathcal{S}_h \quad \exists\ j_1, j_2, \ldots, j_m \text{ tel que } j_1 = j\ ,\ j_m = k \text{ et}$$

$s_{j_\ell}\, s_{j_{\ell+1}}$ est un côté d'un triangle de $\mathcal{C}_h$ pour tout $\ell = 1, \ldots, m-1$.

D'après la remarque précédente on peut supposer que

$$a_{j_\ell, j_{\ell+1}} \neq 0 \quad \forall\, \ell = 1,\ldots,m-1$$

et par conséquent $\hat{A}_{u_h}$ est irréductible.

On peut alors appliquer le résultat de VARGA [28] p.85, et par suite

$$(\hat{A}_{u_h})^{-1} > 0 \ .$$

Comme $\hat{B}_{u_h}$ est une matrice positive régulière, $\hat{C}_{u_h}$ est donc une matrice strictement positive. ∎

Lemme 2.3. Les applications

$$u_h \in \mathcal{U}_h \longrightarrow \lambda_h(u_h) \in \mathbb{R}$$

$$u_h \in \mathcal{U}_h \longrightarrow w_h(u_h) \in \mathbb{R}$$

sont continues.

On a posé $\mathcal{U}_h = U_h \cap \mathcal{U}$.

Démonstration : On ne notera pas, pour les éléments de U_h et W_h, l'indice h. Soit $u^{(n)} \in \mathcal{U}_h$ tel que

$$u^{(n)} \longrightarrow u^{(\infty)} \in \mathcal{U}_h \ .$$

Les applications $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ étant continues de $]0,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$ on a

$$\lambda_h(u^{(n)}) \leq c \int_\Omega |\nabla w(x)|^2 \, dx \qquad \forall\, w \in W_h \cap S_1$$

où c est une constante indépendante de n . Cette relation montre que $\lambda_h(u^{(n)})$ est borné dans $\mathbb{R}$. Il en est de même de $w(u^{(n)})$ puisque $w(u^{(n)}) \in S_1$. Donc on peut extraire une sous suite telle que

$$\lambda_h(u^{(n_i)}) \longrightarrow \lambda^*$$

$$w(u^{(n_i)}) \longrightarrow w^* \in S_1$$

∇ étant un opérateur linéaire de W_h dans un espace de dimension finie, on a aussi

$$\nabla\ w(u^{(n_i)}) \longrightarrow \nabla w^* .$$

Constatons que

$$w^* \geqslant 0 .$$

Les expressions de $a_{ij}(u^{(n)})$ et $b_{ij}(u^{(n)})$ montrent que

$$a_{ij}(u^{(n_i)}) \longrightarrow a_{ij}(u^{(\infty)})$$

$$b_{ij}(u^{(n_i)}) \longrightarrow b_{ij}(u^{(\infty)}) .$$

Et donc si l'on passe à la limite, dans l'expression

$$\hat{A}_{u^{(n_i)}}\, w(u^{(n_i)}) = \lambda_h(u^{(n_i)})\, \hat{B}_{u^{(n_i)}}\, w(u^{(n_i)})$$

on obtient

$$\hat{A}_{u^{(\infty)}}\, w^* = \lambda^*\, \hat{B}_{u^{(\infty)}}\, w^* .$$

Ce qui, d'après le Lemme 2.1 implique

$$\lambda^* = \lambda_h(u^{(\infty)})$$

$$w^* = w(u^{(\infty)}) .$$

L'unicité des limites montre que ce sont les suites toute entières qui convergent vers $\lambda_h(u^{\infty})$ et $w(u^{(\infty)})$. ∎

Comme dans le cas continu on va démontrer la

Proposition 2.1. Les applications

$$u_h \in \mathcal{U}_h \longrightarrow \lambda_h(u_h) \in \mathbb{R}$$

$$u_h \in \mathcal{U}_h \longrightarrow {}_h(u_h) \in W_h$$

sont différentiables en tout point $u_h^{(o)}$ de $\mathcal{U}_h$, de plus

(2.15) $$\lambda_h'(u_h^{(o)}).v_h =$$

$$\frac{\int_\Omega \{ a'(u_h^{(o)}(x)) |\nabla w_h^{(o)}(x)|^2 - \lambda_h^{(o)} b'(u_h^{(o)}(x))\, w_h^{(o)}(x)^2 \}\, v_h(x)\, dx}{\int_\Omega b(u_h^{(o)}(x))\, w_h^{(o)}(x)^2\, dx}$$

où

$$w_h^{(o)} = w_h(u_h^{(o)}) \quad \text{et} \quad \lambda_h^{(o)} = \lambda_h(u_h^{(o)}) .$$

Démonstration : On ne notera pas l'indice h pour les éléments de U_h et W_h. On considère la fonction :

$$F_h(u,y) = \hat{A}_u w - \lambda \hat{B}_u w$$

de $U_h \times (W_h \times \mathbb{R})$ dans W_h

où

$$y = (w,\lambda) .$$

Soit $u^{(o)} \in \mathcal{U}_h$ on pose

$$\hat{A}^{(o)} = \hat{A}_{u^{(o)}}, \quad \hat{B}^{(o)} = \hat{B}_{u^{(o)}}, \quad \lambda^{(o)} = \lambda_h(u^{(o)})$$

et $w^{(o)} = w(u^{(o)})$.

Les dérivées partielles de F_h au point $(u^{(o)}, w^{(o)}, \lambda^{(o)})$ sont :

$$\left(\frac{\partial F_h}{\partial w}\right)_o : w \in W_h \longrightarrow \hat{A}^{(o)} w - \lambda^{(o)} B^{(o)} w \in W_h$$

$$\left(\frac{\partial F_h}{\partial \lambda}\right)_o : \lambda \in \mathbb{R} \longrightarrow -\lambda \hat{B}^{(o)} w^{(o)} \in W_h$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_o : u \in \mathcal{U}_h \longrightarrow \hat{A}'^{(o)} w^{(o)} - \lambda^{(o)} \hat{B}'^{(o)} w^{(o)} \in W_h$$

où $\hat{A}'^{(o)} = (a'_{ij}(u^{(o)}).v)$ et $\hat{B}'^{(o)} = (b'_{ij}(u^{(o)}),v)$.

Remarquons que d'après (2.5), si $u^{(o)} = (u_k^{(o)})$ et $v = (v_k)$ on a

$$(2.16)\qquad a'_{ij}(u^{(o)}).v = \sum_{k=1}^{P} \mathbb{a}'(u_k^{(o)})\ v_k \int_{T_K} \nabla\phi_{i,h}(x).\nabla\phi_{j,h}(x)\ dx$$

$$(2.17)\qquad a'_{ij}(u^{(o)}).v = \int_{\Omega} \mathbb{a}'(u^{(o)}(x))\ v(x)\ \nabla\phi_{i,h}(x).\nabla\phi_{j,h}(x)\ dx\ .$$

De même

$$b'_{ij}(u^{(o)}).v = \int_{\Omega} \mathbb{b}'(u^{(o)}(x))\ v(x)\ \phi_{i,h}(x)\ \phi_{j,h}(x)\ dx\ .$$

Admettons pour l'instant le lemme suivant :

Lemme 2.4. $(\frac{\partial F_h}{\partial Y})_o$ est un isomorphisme de $\mathbb{R} \times w^{(o)\perp\!\!\!\perp}$ sur W_h .

On peut alors appliquer le théorème des fonctions implicites à la fonction F définie sur

$$\mathcal{U}_h \times \{w^{(o)} + W_h \cap w^{(o)\perp\!\!\!\perp}) \times \mathbb{R}\}\ .$$

Et on termine alors la démonstration comme dans le cas continu. ∎

Démonstration du Lemme 2.4. : $(\frac{\partial F}{\partial w})_o$ est un isomorphisme de $w^{(o)\perp\!\!\!\perp}$ sur $w^{(o)\perp\!\!\!\perp}$

$(\frac{\partial F_h}{\partial \lambda})_o$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\hat{B}^{(o)}\, w^{(o)}$.

Par suite $(\frac{\partial F}{\partial Y})_o$ est un isomorphisme de $\mathbb{R} \times w^{(o)\perp\!\!\!\perp}$ sur

$$\hat{B}^{(o)} w^{(o)} \oplus w^{(o)\perp\!\!\!\perp} = W_h\ .$$ ∎

Proposition 2.2. La propriété suivante est vérifiée

$$(2.18)\qquad \lambda_h(v_h) \leq \lambda_h(u_h) + \lambda'_h(u_h).(v_h - u_h)\ \frac{\int_\Omega \mathbb{b}(u_h(x))\ w_h^2(u_h;x)\ dx}{\int_\Omega \mathbb{b}(v_h(x)\ w_h^2(u_h;x)\ dx}$$

$$\forall (u_h, v_h) \in \mathcal{U}_h \times \mathcal{U}_h\ .$$

Démonstration : Elle est identique au cas continu.

On en déduit :

Corollaire 2.1. λ_h est pseudoconcave (et donc quasiconcave) sur $\mathcal{U}_h$.

3 - APPROXIMATION DU PROBLEME $\mathcal{P}_{\alpha,\beta}$.

On pose

$$\lambda_{h,1} = \lambda_h(1) .$$

Et l'on va approximer le problème $\mathcal{P}_{\alpha,\beta}$ par

$\mathcal{P}_{\alpha,\beta,h}$
$$\inf_{\substack{u_h \in C_{\alpha,\beta} \cap U_h \\ \lambda_h(u_h) = \lambda_{h,1}}} J(u_h) .$$

On introduit également le problème

$\mathcal{Q}_{\alpha,\beta,h}$
$$\inf_{\substack{u_h \in C_{\alpha,\beta} \cap U_h \\ \lambda_h(u_h) \geq \lambda_{h,1}}} J(u_h)$$

constatons que la fonction u_α définie par III(6.1) est un élément de U_h et que :

(3.1) $\quad J(u_\alpha) < J(u_h)$ pour tout $u_h \in C_{\alpha,\beta} \cap U_h$, $u_h \neq u_\alpha$.

Proposition 3.1. Si on suppose de plus que

(3.2) $$\lambda_h(u_\alpha) < \lambda_{1,h}$$

(3.3) $\quad \exists\, u_{\gamma,h} \in C_{\alpha,\beta} \cap U_h$ tel que $\lambda_h(u_{\gamma,h}) > \lambda_{1,h}$

alors

(i) les problèmes $\mathcal{P}_{\alpha,\beta,h}$ et $\mathcal{Q}_{\alpha,\beta,h}$ sont équivalents

(ii) $\bar{u}_h \in C_{\alpha,\beta} \cap U_h$ est solution du problème $\mathcal{P}_{\alpha,\beta,h}$ ou $\mathcal{Q}_{\alpha,\beta,h}$ si et seulement si

(3.4) $$\lambda_h(\bar{u}_h) = \lambda_{1,h}$$

et

$$(3.5)\qquad \begin{cases} \exists\ \eta_{1,h} \text{ tel que} \\ J(v_h) - J(\bar{u}_h) + \eta_{1,h}\,\lambda_h'(\bar{u}_h).(v_h-\bar{u}_h) \geq 0 \quad \forall\ v_h \in C_{\alpha,\beta} \cap U_h \end{cases}$$

(iii) l'ensemble $S(\mathcal{P}_{\alpha,\beta,h})$ des solutions du problème $\mathcal{P}_{\alpha,\beta,h}$ est convexe et $w_h(\bar{u}_h)$ est indépendant de u_h pour $u_h \in S(\mathcal{P}_{\alpha,\beta,h})$.

(iv) $\forall\ \beta \in]1,+\infty]$ le problème $\mathcal{Q}_{\alpha,\beta,h}$ (et donc $\mathcal{P}_{\alpha,\beta,h}$) admet au moins une solution.

Démonstration : La démonstration de cette Proposition est identique à celle de la Proposition III.6.1.

Si $\beta = +\infty$ on a existence car pour $u_h \in C_{\alpha,\beta} \cap U_h$, $J(u_h)$ est une norme. ∎

Proposition 3.2. Soit $\bar{u}_h = (\bar{u}_k)$ une solution de $\mathcal{P}_{\alpha,\beta,h}$. On pose

$$(3.6)\qquad g_h(\bar{u}_h;x) = (g_k(\bar{u}_h)) \in U_h$$

où

$$(3.7)\qquad g_k(\bar{u}_h) = \mathbb{a}'(\bar{u}_k) \int_{T_K} |\nabla w_h(\bar{u}_h)|^2\,dx - \lambda_{1,h}\,\mathbb{b}'(u_k) \int_{T_k} w_h^2(\bar{u}_h)\,dx$$

alors la condition (3.5) est équivalente à

$$\exists\ e_h > 0 \text{ vérifiant}$$

$$(3.8)\qquad g_k(\bar{u}_h) \leq e_h \quad \forall\ k \in I_\beta = \{k \in [1,2,\ldots,P];\ \bar{u}_k < \beta\}$$

et

$$(3.9)\qquad g_k(\bar{u}_h) \geq e_h \quad \forall\ k \in I_\alpha = \{k \in [1,2,\ldots,P];\ \bar{u}_k > \alpha\} \ .$$

Démonstration : On pose

$$e_h = -\frac{\int_\Omega \mathbb{b}(\bar{u}_h(x))\ w_h^2(\bar{u}_h;x)\,dx}{\eta_{1,h}} \ .$$

La relation (3.5) est équivalente à

$$\sum_{k=1}^{P} \{e_h - g_k(\bar{u}_h)\} (v_k - \bar{u}_k) \geq 0 \quad \forall v_h = (v_k) \in C_{\alpha,\beta,h}$$

ce qui permet de déduire (3.8) et (3.9). ∎

Par application de la Proposition III.5.4 on montre le résultat suivant :

Proposition 3.3. Si l'on suppose que pour tout $p \leq 0$ la fonction

$$u_h \longrightarrow \mathcal{L}_h(u_h,p) = J(u_h) + p(\lambda_h(u_h) - \lambda_1,h)$$

est quasiconvexe, alors $\bar{u}_h$ est solution du problème $\mathcal{P}_{\alpha,\beta,h}$ (ou $\mathcal{Q}_{\alpha,\beta,h}$) si et seulement si $(\bar{u}_h,\bar{p}_h)$ est point selle de $\mathcal{L}_h(u,p)$ sur $C_{\alpha,\beta} \cap U_h \times \mathbb{R}$. De plus on a $\bar{p}_h < 0$.

Nous allons maintenant étudier dans le cas de l'exemple 1 la convergence de ce problème $\mathcal{P}_{\alpha,\beta,h}$ lorsque le pas de discrétisation h tend vers zéro,

Proposition 3.4. Dans le cas de l'application III.6.1 et si $\beta < +\infty$ on a le résultat suivant :

(i) $\lim J(\bar{u}_h) = \text{Inf } \mathcal{P}_{\alpha,\beta}$

et

(ii) on peut extraire de la suite $\bar{u}_h$ une sous-suite convergeant vers une solution $\bar{u}$ du problème $\mathcal{P}_{\alpha,\beta}$.

Nous allons tout d'abord établir quelques résultats préliminaires.

Lemme 3.1. $\lambda_{h,1} > \lambda_1$ et $\lim \lambda_{h,1} = \lambda_1$.

Démonstration : voir STRANG et FIX [21].

Lemme 3.2. Pour tout $u \in C_{\alpha,\beta}$ on a :

$$\lim_{h \to 0} \lambda_h(q_h u) = \lambda(u) .$$

Démonstration : D'après (2.10) on a

$$\lambda_h(q_h u) \leq \frac{\int_\Omega q_h u(x) \, |\nabla r_h \, w(u;x)|^2 \, dx}{\int_\Omega r_h \, w(u;x)^2 \, dx} .$$

D'où

$$\lambda_h(q_h u) \leq \beta \, c_1 .$$

Les c_i désignent dans tout ce paragraphe des constantes indépendantes de h .

Comme

$$\int_\Omega q_h \, u(x) |\nabla w_h(q_h u;x)|^2 \, dx = \lambda_h(q_h u)$$

on en déduit

$$\int_\Omega |\nabla w_h(q_h u;x)|^2 \, dx \leq c_2 .$$

Et par conséquent on peut extraire, des suites $\lambda_h(q_h u)$ et $w_h(q_h u)$, des sous-suites $\lambda_{h'}(q_{h'},u)$ et $w_{h'}(q_{h'},u)$ telles que

$$\lambda_{h'}(q_{h'},u) \longrightarrow \lambda^*$$

$$w_{h'}(q_{h'},u) \longrightarrow w^* \text{ dans } W \text{ faible et dans } L^2(\Omega) \text{ fort}$$

$$w_{h'}(q_{h'},u;x) \longrightarrow w^*(x) \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega .$$

Si l'on écrit la relation (2.1) pour ce problème spectral avec $w_h = r_h w$ où $w \in W$ on obtient :

$$\int_\Omega q_{h'} u(x) \, \nabla w_{h'}(q_{h'},u;x) . \nabla r_h \, w(x) \, dx = \lambda_{h'}(q_{h'},u) \int_\Omega w_{h'}(q_{h'},u;x) \, r_{h'} \, w(x) \, dx .$$

Or ∇w_h est constant sur chaque triangle T_k de $\mathcal{T}_h$ pour tout $w_h \in W_h$ et par conséquent d'après (1.5), (1,6) le premier membre de cette égalité s'écrit

$$\int_\Omega u(x) \, \nabla w_{h'}(q_{h'},u;x) . \nabla r_{h'} w(x) \, dx .$$

On peut alors passer à la limite et, grâce aux Lemmes 1.1 et 1.2 on obtient

$$\int_\Omega u(x)\ \nabla w^*(x).\nabla w(x)\ dx = \lambda^* \int_\Omega w^*(x)\ w(x)\ dx$$

et ceci pour tout $w \in W$.

Comme w^* vérifie II.(1.17) et II.(1.18), la Proposition II.1.1 permet d'affirmer que

$$\lambda(u) = \lambda^*$$

$$w(u) = w^*$$

et que ce sont toutes les suites $\lambda_h(q_h u)$ et $w_h(q_h u)$ qui convergent vers $\lambda(u)$ et $w(u)$. ∎

Lemme 3.3. Soit $u_h \in C_{\alpha,\beta}$, si u_h converge vers u pour la topologie faible * de $L^\infty(\Omega)$ alors

$$\limsup_{h\to 0}\ \lambda_h(u_h) \leq \lambda(u) .$$

Démonstration : D'après (2.10) on a

$$\lambda_h(u_h) \leq \frac{\int_\Omega u_h(x)\ |\nabla r_h w(u;x)|^2\ dx}{\int_\Omega |r_h\ w(u;x)|^2\ dx} \qquad (3.11)$$

Et en passant à la limite on obtient le résultat. ∎

Démonstration de la Proposition 3.4 ; Puisque λ_h est concave sur $C_{\alpha,\beta} \cap U_h$ on a, d'après la Proposition 3.3 :

$$J(\bar{u}_h) \leq J(v_h) + \bar{p}_h(\lambda_h(v_h) - \lambda_{h,1}) \qquad \forall\, v_h \in C_{\alpha,\beta} \cap U_h . \qquad (3.12)$$

Si l'on écrit cette inégalité pour

$$v_h = u_\beta$$

où

$$u_\beta(x) \equiv \beta \qquad \forall\, x \in \Omega ,$$

on obtient alors

$$\frac{J(u_\alpha) - J(u_\beta)}{\beta - 1} \leqslant \bar{p}_h \lambda_{1,h} \leqslant \bar{p}_h \lambda_1$$

D'où

$$c_3 \leqslant \bar{p}_h \leqslant 0 .$$

On peut donc extraire des suites $\bar{p}_h$ et $\bar{u}_h$, des sous-suites $\bar{p}_{h'}$ et $\bar{u}_{h'}$ telles que

$$\bar{u}_{h'} \longrightarrow \hat{u} \text{ dans } L^\infty(\Omega) \text{ faible } *$$

$$\bar{p}_{h'} \longrightarrow \hat{p} \text{ dans } \mathbb{R}_- .$$

Soit $v \in C_{\alpha,\beta}$, si l'on passe à la limite dans (3.12) avec

$$v_{h'} = q_{h'} v$$

on obtient, compte tenu des Lemmes 1.2, 3.1 et 3.2,

$$J(\hat{u}) \leqslant J(v) + \hat{p}(\lambda(v) - \lambda_1) \quad ; \tag{3.13}$$

et ceci pour tout $v \in C_{\alpha,\beta}$.

D'après le Lemme 3.3 on a

$$\lambda(\hat{u}) \geqslant \lambda_1 . \tag{3.14}$$

Les relations (3.13), (3.14) et le Corollaire III.6.2 montrent que $\hat{u}$ est solutio du problème $\mathcal{P}_{\alpha,\beta}$.

Donc on vient de montrer la partie (ii) de la Proposition. Cette démonstratio montre que toute valeur d'adhérence faible * de $\bar{u}_h$ est solution du problème $\mathcal{P}_{\alpha,\beta}$ et donc toute valeur d'adhérence de $J(\bar{u}_h)$ vaut $\operatorname{Inf} \mathcal{P}_{\alpha,\beta,h}$. L'unicité de cette valeur implique (i). ∎

4 - RESOLUTION DU PROBLEME DISCRETISE.

On va utiliser la méthode du Lagrangien augmenté (cf. [19]). Nous allons décrire cette méthode dans le cadre abstrait du paragraphe III.5, et on fait les hypothèses III.(5.1), III.(5.3), III.(5.8) et III.(5.7) . Le Lagrangien jusqu'à présent considéré était celui défini par III.(5.16) c'est-à-dire

$$\mathcal{L}(u,p) = J(u) + p(\lambda(u) - \lambda_1) \qquad (u,p) \in C \times \mathbb{R}_- . \tag{4.1}$$

Nous allons maintenant étudier celui défini par

$$\mathcal{L}_\varepsilon(u,p) = J(u) + \frac{\varepsilon}{2}\left\{\left[\left(p + \frac{\lambda(u)-\lambda_1}{\varepsilon}\right)^-\right]^2 - p^2\right\} \tag{4.2}$$

pour $(u,p) \in C \times \mathbb{R}_-$.

Constatons que l'on a

$$\mathcal{L}_\varepsilon(u,p) = \begin{cases} J(u) + \frac{1}{2\varepsilon}(\lambda(u)-\lambda_1)^2 + p(\lambda(u)-\lambda_1) & \text{si } \lambda(u) - \lambda_1 \leq -p.\varepsilon \\ J(u) - \frac{p^2.\varepsilon}{2} & \text{si } \lambda(u) - \lambda_1 \geq -p.\varepsilon \end{cases} \tag{4.3}$$

Proposition 4.1. Si $(\bar{u},\bar{p}) \in C \times \mathbb{R}_-$ est point selle sur $C \times \mathbb{R}_-$ du Lagrangien $\mathcal{L}(u,p)$ alors $(\bar{u},\bar{p})$ est point selle sur $C \times \mathbb{R}_-$ de $\mathcal{L}_\varepsilon(u,p)$.

Démonstration : Si $(\bar{u},\bar{p})$ est point selle de $\mathcal{L}(u,p)$ sur $C \times \mathbb{R}_-$ alors, il est facile de voir que

$$\lambda(\bar{u}) \geq \lambda_1 \tag{4.4}$$

et

$$J(\bar{u}) \leq J(u) + \bar{p}(\lambda(u)-\lambda_1) \quad \forall u \in C . \tag{4.5}$$

Par suite

$$\mathcal{L}_\varepsilon(\bar{u},p) = J(\bar{u}) \quad \forall p \leq 0 , \tag{4.6}$$

$$\mathcal{L}_\varepsilon(u,\bar{p}) = \begin{cases} \mathcal{L}(u,\bar{p}) + \frac{1}{2\varepsilon}(\lambda(u)-\lambda_1)^2 & \text{si } \lambda(u) - \lambda_1 \leq -\bar{p}.\varepsilon \\ J(u) - \bar{p}^2\varepsilon + \bar{p}^2\frac{\varepsilon}{2} & \text{sinon} , \end{cases}$$

or $\mathcal{L}(u,\bar{p}) \leq J(u) - \bar{p}^2\varepsilon$ si $\lambda(u) - \lambda_1 \geq -\bar{p}\,\varepsilon$

par conséquent

(4.7) $\qquad \mathcal{L}_\varepsilon(u,\bar{p}) \geq \mathcal{L}(u,\bar{p}) \qquad \forall\, u \in C$.

Les relations (4.5), (4.6) et (4.7) impliquent que $(\bar{u},\bar{p})$ est point selle de $\mathcal{L}_\varepsilon(u,p)$. ∎

Proposition 4.2. Si $(\bar{u}_\varepsilon,\bar{p}_\varepsilon)$ est point selle sur $C \times \mathbb{R}_-$ de $\mathcal{L}_\varepsilon(u,p)$ alors $\bar{u}_\varepsilon$ est solution du problème $\mathcal{P}$.

Démonstration : Soit $(\bar{u}_\varepsilon,\bar{p}_\varepsilon)$ un point selle sur $C \times \mathbb{R}_-$ de $\mathcal{L}_\varepsilon(u,p)$ alors on a les deux inéquations suivantes :

(4.8) $\qquad \mathcal{L}_\varepsilon(\bar{u}_\varepsilon,p) \leq \mathcal{L}_\varepsilon(\bar{u}_\varepsilon,\bar{p}_\varepsilon) \qquad \forall\, p \in \mathbb{R}_-$

(4.9) $\qquad \mathcal{L}_\varepsilon(\bar{u}_\varepsilon,\bar{p}_\varepsilon) < \mathcal{L}_\varepsilon(u,\bar{p}_\varepsilon) \quad \forall\, u \in C$.

Deux cas sont à considérer : $\bar{p}_\varepsilon = 0$ et $\bar{p}_\varepsilon \neq 0$.

1er cas : $\bar{p}_\varepsilon = 0$. Alors

(4.10) $\qquad \lambda(\bar{u}_\varepsilon) \geq \lambda_1$;

car si $\lambda(\bar{u}_\varepsilon) - \lambda_1 < 0$ alors (4.8) implique

$$\lambda(\bar{u}_\varepsilon) = \lambda_1 .$$

(4.9) s'écrit :

(4.11) $\qquad J(\bar{u}_\varepsilon) \leq J(u) + \frac{1}{2\varepsilon}\left[(\lambda(u) - \lambda_1)_-\right]^2$.

Cette relation et (4.10) impliquent que $\bar{u}_\varepsilon$ est solution du problème $\mathcal{Q}$ et donc du problème $\mathcal{P}$.

2ème cas : $\bar{p}_\varepsilon \neq 0$. Alors on a

(4.12) $\qquad \lambda(\bar{u}_\varepsilon) - \lambda_1 = 0$.

En effet si $\lambda(\bar{u}_\varepsilon) - \lambda_1 < -\bar{p}_\varepsilon.\varepsilon$ alors, (4.8) montre que,

$$p(\lambda(\bar{u}_\varepsilon) - \lambda_1) \leq \bar{p}_\varepsilon(\lambda(\bar{u}_\varepsilon) - \lambda_1)$$

pour tout p dans un voisinage de $\bar{p}_\varepsilon$; et par suite on a (4.12). Si $\lambda(\bar{u}_\varepsilon) - \lambda_1 \geq -\bar{p}_\varepsilon.\varepsilon$ alors, (4.8) implique

$$-\frac{p^2}{2}\varepsilon \leq -\frac{\bar{p}_\varepsilon^{\,2}}{2}\varepsilon \qquad \forall\, p \in [\bar{p}_\varepsilon, 0]$$

ce qui est absurde.

(4.9) s'écrit :

$$J(\bar{u}_\varepsilon) \leq J(u) + \frac{\varepsilon}{2}\left[(\bar{p}_\varepsilon + \frac{\lambda(u)-\lambda_1}{\varepsilon})_-\right]^2 - \frac{\varepsilon}{2}\bar{p}_\varepsilon^2$$

ce qui implique

(4.13) $\qquad J(\bar{u}_\varepsilon) \leq J(u)$ pour tout u appartenant à c vérifiant $\lambda(u) = \lambda_1$.

Et donc la relation (4.12), (4.13) montre que $\bar{u}_\varepsilon$ est solution du problème $\mathcal{P}$. ∎

Par conséquent si le problème $\mathcal{P}$ admet une solution au moins, et si l'on fait l'hypothèse supplémentaire (III.5.21), $\mathcal{L}(u,p)$ alors, admet au moins un point selle (Proposition III.5.4) et donc, d'après la Proposition 4.1, $\mathcal{L}_\varepsilon(u,p)$ admet un point selle et la première composante de tout point selle de $\mathcal{L}_\varepsilon(u,p)$ est solution du problème $\mathcal{P}$. Pour trouver un point selle de $\mathcal{L}_\varepsilon(u,p)$ on considère l'algorithme suivan

on part de $p^{(o)} \in \mathbb{R}_-$ on calcule $u^{(1)}, p^{(1)}, \ldots, u^{(n)}, p^{(n)}$,

(4.14) on détermine $u^{(n+1)} \in C$ qui minimise sur C :

$$u \longrightarrow \mathcal{L}_\varepsilon(u, p^{(n)})$$

et on pose

(4.15) $$p^{(n+1)} = (p^{(n)} + \frac{\lambda(u^{n+1}) - \lambda_1}{\varepsilon})_- .$$

Revenons à notre problème $\mathcal{P}_{\alpha,\beta,h}$. On suppose que (3.2) et (3.3) sont vérifiés

alors ce problème admet au moins une solution. En général (III.5.21) n'est pas vérifiée (sauf si λ est concave) néanmoins on considèrera cette méthode, les essais numériques (cf. §.5) ayant montré que cette méthode pouvait nous donner de bons résultats.

Le problème (4.14) admet au moins une solution sur $C_{\alpha,\beta} \cap U_h, \forall \beta \subset]1, +\infty]$ car

$$\mathcal{L}_\varepsilon(u_h, p^{(n)}) \geq J(u_h) - \frac{\varepsilon (p^{(n)})^2}{2}$$

et

$$J(u_h) \longrightarrow +\infty \quad \text{quand} \quad u_h \longrightarrow +\infty \ , \ u_h \in C_{\alpha,\beta} \cap U_h \ .$$

Pour résoudre le problème (4.14) on utilise une méthode de gradient. Et donc à chaque étape de cette méthode on doit calculer $\lambda_h'(u_h)$. D'après (2.15) on doit donc calculer

$$\lambda_h(u_h) \quad \text{et} \quad w_h(u_h)$$

c'est-à-dite calculer la plus petite valeur propre du problème spectral (2.9) et le vecteur propre positif correspondant. Pour déterminer cette valeur propre on utilise la méthode classique dite de la puissance inverse itérée .

5 - RESULTATS NUMERIQUES.

On a testé la méthode dans le cas de l'application III.6.2 où l'on a pris $\Omega =]0,1[$ et comme conditions aux limites

$$w(0) = w(1) = 0 \ .$$

On a pris pour β :

$$\beta = +\infty \ .$$

Pour des raisons de symétrie on peut se limiter à l'ouvert $]0,1/2[$ en prenant

$$w'(1/2) = 0 \ .$$

On peut obtenir la solution explicitement en résolvant les conditions nécessaires et suffisantes III.(6.27) et III.(6.28) ; w(u) vérifiant

$$\begin{cases} (uw')' + \lambda_1(u+\delta)w = 0 \\ w(0) = 0 \\ w'(1/2) = 0 \ . \end{cases}$$

On obtient

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} \dfrac{ch^2 \sqrt{\lambda_1}\, x_o}{ch^2 \sqrt{\lambda_1}\, x} \cdot (\dfrac{\delta}{2} + \alpha) - \dfrac{\delta}{2} & 0 \leqslant x \leqslant x_o \\ \alpha & x_o \leqslant x \leqslant 1/2 \end{cases}$$

et

$$w(\bar{u};x) = \begin{cases} w_o \ sh \sqrt{\lambda_1}\, x & 0 \leqslant x \leqslant x_o \\ w_o \dfrac{sh \sqrt{\lambda_1}\, x_o}{\cos \mu(x_o - 1/2)} \cos \mu(x - \dfrac{1}{2}) & x_o \leqslant x \leqslant 1/2 \end{cases}$$

où

$$\mu = \left[(\frac{\alpha+\delta}{\alpha})\ \lambda_1\right]^{1/2} ,$$

x_o est la solution de

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \ th \sqrt{\lambda_1}\, x = -\frac{1}{\mu} \cot g \ \mu(x - 1/2)$$

et

w_o est obtenue par normalisation.

On peut calculer le poids minimal :

$$M = \int_o^1 u(x)\, dx = \frac{sh\ 2\sqrt{\lambda_1}\, x_o}{\sqrt{\lambda_1}} \cdot (\frac{\delta}{2} + \alpha) + (1-2x_o)\alpha - \delta\, x_o \ .$$

On a pris

$$\delta = 1 \quad et \quad \alpha = 0.5$$

et alors $M = 0{,}685\ 229\ \ldots$.

On a découpé l'intervalle $[0,1]$ en N_1 intervalles de longueur $h = \frac{1}{N_1}$. Pour les essais numériques on a pris $N_1 = 20$. On a obtenu au bout de 5 itérations dans la méthode de la puissance inverse itérée une valeur approchée de $\lambda_{1,h}$:

$$\lambda_{1,h} \approx 4.944\ 78 \ .$$

(En fait $\lambda_{1,h} = \frac{6}{h^2(1+\delta)} \left(\frac{1 - \cos \pi/N_1}{2 + \cos \pi/N_1}\right) = 4.\ 944\ 957\ 3\ \ldots\ldots$

alors que

$$\lambda_1 = \frac{\pi^2}{1+\delta} = 4.\ 934\ 802\ 2\ldots)$$

On n'a fait qu'une seule étape dans la méthode du gradient. Si l'on appelle $u_h^{(n+1)} = (u_i^{(n+1)}) \in \mathbb{R}^{N_1}$ le vecteur ainsi obtenu, celui-ci est défini par

$$u_i^{(n+1)} = \Pi(u_i^{(n)} - \rho\ v_i^{(n)}) \quad 1 \leq i \leq N_1$$

où $v_i^{(n)}$ est le gradient normalisé pris au point $u_h^{(n)} = (u_i^{(n)})$ de la fonction

$$u_h = (u_i) \in \mathbb{R}^{N_1} \longrightarrow \mathcal{L}_{\varepsilon,h}(u_h, p_h^{(n)})$$

et Π est la projection sur $[\alpha, +\infty[$.

On a pris pour test de convergence

$$\text{test}(n+1) = g(u_h^{(n+1)}) + |\lambda_h(u_h^{(n+1)}) - \lambda_{h,1}| \leq \varepsilon_m$$

où

$$g(u_h^{(n+1)}) = \max_{\substack{1 \leq i \leq N_1 \\ u_i^{(n+1)} > \alpha}} \left| \frac{\partial}{\partial u_i} \mathcal{L}_{\varepsilon,h}(u_h^{(n+1)}, p_h^{(n)}) \right| .$$

On est sorti de l'algorithme au bout de 18 itérations en prenant

$$\rho = 3\ , \quad p^{(o)} = -5\ , \quad \varepsilon = \frac{1}{2}\ , \quad \varepsilon_m = 10^{-3} \quad \text{et} \quad u_h^{(o)} = 1\ .$$

Les résultats obtenus sont indiqués par le tableau 1, et

$$\lambda_h(u_h^{(18)}) = 4.944\ 5 \ .$$

i	$u_i^{(18)}$	$\overline{u}((i - \frac{1}{2})h)$
1	0.9920	0.9923
2	0.9558	0.9561
3	0.8867	0.8871
4	0.7911	0.7916
5	0.6767	0.6774
6	0.5517	0.5527
7	0.5000	0.5000
8	0.5000	0.5000
9	0.5000	0.5000
10	0.5000	0.5000
M	0.6854	0.6852

TABLEAU 1

On a également considéré le cas de l'application III.6.3 avec $\Omega =]0,1[$, $\beta = +\infty$ et comme conditions aux limites

$$w(0) = w'(1) = 0 \ .$$

On peut donc comme dans le cas précédent, résoudre les conditions nécessaires et suffisantes : III.(6.29) et III.(6.30) w vérifiant

$$\begin{cases} w'' + \lambda_1 \dfrac{w}{u^2} = 0 \\ w(0) = 0 \\ w'(1) = 0 \end{cases}$$

On pose

$$\xi = \frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha} .$$

Soit (x_o, θ_o) la solution du système

$$2\theta_o - \sin 2\theta_o - \pi - 4 \frac{\sin^2 \theta_o}{\alpha} \frac{\sqrt{\lambda_1}}{3} (x_o - 1) = 0$$

$$\frac{\operatorname{tg} \xi x_o}{\alpha \xi} - \frac{\operatorname{tg} \theta_o}{3\sqrt{\frac{\lambda_1}{3}}} .$$

On obtient alors pour l'épaisseur de la structure

$$u(x) = \begin{cases} \alpha & 0 \leq x \leq x_o \\ \dfrac{\alpha}{\sin^2 \theta_o} \sin(\theta(x)) , & x_o \leq x \leq 1 , \end{cases}$$

tandis que la vibration est donnée par

$$w(x) = w_o \begin{cases} \sin \xi x \\ \dfrac{\alpha}{\sin^2 \theta_o} \sin^3 \theta(x) \end{cases}$$

où $\theta(x)$ est solution de

$$2\theta - \sin 2\theta - \pi - \mu(x-1) = 0$$

et

$$\mu = 4 \sqrt{\frac{\lambda_1}{3}} \frac{\sin^2 \theta_o}{\alpha} .$$

On obtient le poids minimal suivant

$$M = \int_o^1 u(x)\, dx = \alpha x_o + \frac{\alpha}{\sin^2 \theta_o \mu} \{\frac{3}{2} (\frac{\pi}{2} - \theta_o) + \sin 2\theta_o - \frac{\sin 4\theta_o}{8}\} .$$

Afin de considérer les mêmes données physiques que [8] nous avons pris

$$u_1(x) = \frac{4}{10\pi} \sqrt{\frac{\pi}{3}} = 0.130\ 2940$$

et $$\alpha = 0.05 \ ,$$

cela correspond au cas $\rho_o = 1\,000$ livres des articles cités. Dans ce cas on a

$$\lambda_1 = \lambda(u_1) = 0.041\,887\,9$$

$$M = 0.114\,034 \ .$$

On a fait la même discrétisation que dans le cas précédent avec $N_1 = 20$ et on a obtenu au bout de 5 itérations de la méthode de la puissance inverse itérée

$$\lambda_{1,h} = 0.041\,912 \ .$$

On a tout d'abord effectué un essai en ne faisant qu'une seule étape dans la méthode du gradient pour résoudre (4.14) mais on a constaté une oscillation de la fonction test(n) . Aussi a-t-on préféré faire quelques itérations dans la méthode du gradient. Le problème (4.14) est donc résolu de la manière suivante

$$u_h^{(n,1)} = u_h^n$$

$$u_i^{(n,q+1)} = \prod(u_i^{(n,q)} - \rho\, v_i^{(q)}) \qquad 1 \leq i \leq N_1$$

où $(v_i^{(q)})$ est le gradient normalisé pris au point

$$u_h^{(n,q)} = (u_i^{(n,q)})$$

de la fonction

$$u_h = (u_i) \longrightarrow \mathcal{L}_{\varepsilon,h}(u_h, p_h^n)$$

et $\prod$ est la projection sur $[\alpha, +\infty[$.

On sort de l'algorithme au bout de q_n étapes où q_n est définie par

$$q_n = \begin{cases} q_{max} \text{ si } g(u_h^{(n,q)}) > \varepsilon_m \quad \forall\, q = 1, \ldots, q_{max} \\ \text{le premier } q < q_{max} \text{ tel que } g(u_h^{(n,q)}) < \varepsilon_m \end{cases}$$

On prend alors

$$u_h^{(n+1)} = u_h^{(n,q_n)} .$$

Nous avons effectué un essai avec $\rho = 0,15$, $\varepsilon = 0,001$, $\varepsilon_m = 0,001$ et on est sorti de l'algorithme global au bout de 4 itérations en obtenant pour q_1, q_2, q_3 et q_4 respectivement 5, 5, 5 et 1, c'est-à-dire que l'on a calculé 16 fois une valeur propre c'est ce qui en gros mesure le coût du calcul. On a obtenu

$$\lambda_h(u_h^{(4)}) = 0.419\ 36$$

$$\int_0^1 u_h^{(4)}\, dx = 0.114\ 123$$

et la fonction $u_h^{(4)}$ est donnée par le Tableau 2 où elle est comparée avec la solution $\bar{u}$ du problème continu.

Tableau 2

i	$u_i^{(4)}$	$u((i - \frac{1}{2})h)$
1	0.0500	0.0500
2	0.0500	0.0500
3	0.0596	0.0594
4	0.0729	0.0727
5	0.0842	0.0840
6	0.0939	0.0938
7	0.1025	0.1024
8	0.1101	0.1100
9	0.1168	0.1167
10	0.1227	0.1226
11	0.1279	0.1279
12	0.1325	0.1325
13	0.1365	0.1365
14	0.1399	0.1399
15	0.1428	0.1428
16	0.1452	0.1452
17	0.1471	0.1471
18	0.1485	0.1485
19	0.1495	0.1495
20	0.1499	0.1499

BIBLIOGRAPHIE.

[1] ARMAND, J.L.P. et VITTE, W.J. - *Foundations of aeroelastic optimization and some applications to continuous systems.*
SUDAAR N°390, Stanford University, 1970.

[2] ARMAND, J.L.P. - *Applications of the theory of optimal control of distributed parameter systems to structural optimization.*
N.A.S.A., CR 2044, Juin 1972.

[3] BREZIS, H., NIRENBERG, L. et STAMPACCHIA, G. - *A remark on Ky Fan's Minimax Principle.*
Bolletino U.M.I. 6, 293-300 (1972).

[4] CIARLET, P.G. - *Numerical analysis of the finite element method.*
Séminaire de Mahématiques Supérieures, Université de Montréal (1975) (à paraître).

[5] EKELAND, I. et TEMAM, R. - *Analyse convexe et problèmes variationnels.*
Paris, Dunod 1973.

[6] GROTHENDIECK, A. - *Espaces vectoriels topologiques.*
Sociedade de Matematica de Sao Paulo 1958.

[7] HALKIN, H. - *Calculus of Variations Classical and Modern.*
C.I.M.E., 1966, 177-192.

[8] HAUG, E.J., PAN, K.C. et STREETER, T.D. - *A computational method for optimal structural design : I piecewise uniform structures.*
Int. J. num. Meth. Eng., 5, 171-184 (1972) - *II Continuous problems.*
Int. J. num. Meth. Eng., 9 649-667 (1975).

[9] JOURON, C. - *Etude des conditions nécessaires d'optimalité pour un problème d'optimisation non convexe.*
C.R. Acad. Sci., 281, Série A, 1031-1034 (1975).

[10] KATO, T. - *Perturbation theory for linear operators.*
Springer-Verlag 1966.

[11] KELLER, J.B. - *The shape of the strongest column.*
Arch. Rat. Mech. Anal., 5, 275-285 (1960).

[12] MANGASARIAN, O.L. - *Nonlinear programming.*
Mc Graw-Hill, 1969.

[13] MIGNOT, F. - *Contrôle de fonctions propres.*
C.R. Acad. Sci., 280, Série A, 333-335 (1975).

[14] MIGNOT, F. - *Inéquations variationnelles et contrôle.*
Thèse de Doctorat d'Etat, Université Paris VI (1975).

[15] MIKLIN, S.G. - *Variational Methods in Mathematical Physics.*
Pergamon Press (1964).

[16] NIORSON, F.I. - *On the optimal design of a vibrating beam.*
Quart. Appl. Math., 23, 47-53 (1965).

[17] ODEH, F. et TADJBAKHSH, I. - *The shape of the strongest column with a follower load.*
J. Optimization Theory Appl., 15, 103-118 (1975).

[18] PRAGER, W. et TAYLOR, J.E. - *Problems of optimal structural design.*
J. Appl. Mech., Serie E, 35, 102-107 (1968).

[19] ROCKAFELLAR, R.T. - *Augmented Lagrange multiplier functions and duality in non convex programming.*
SIAM J. Control, 12, 268-285 (1974).

[20] STAMPACCHIA, G. - *Equations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus.*
Séminaire de Mathématiques supérieures (1965).

[21] STRANG, F. et FIX, G. - *An analysis of the finite element method.*
Prentice Hall 1973.

[22] TAYLOR, J.E. - *Minimum mass bar for axial vibration at specified natural frequency.*
A.I.A.A. Journal, 5, 1911-1913 (1967).

[23] TAYLOR, J.E. - *Optimum design of a vibrating bar with specified minimum cross section.*
A.I.A.A. Journal, 6, 1379-1381 (1968).

[24] TAYLOR, J.E. et LIU, C.Y. - *Optimal design of columns.*
A.I.A.A. Journal, 6, 1497-1502 (1968).

[25] TEMAM, R. - *On the theory and numerical analysis of the Navier-Stokes equations.*
(Cours à l'Université de Maryland) Poblications mathématiques d'Orsay n°90.

[26] TURNER, M.I. - *Design of minimum mass structures with specified natural frequencies.*
A.I.A.A. Journal, 5, 406-412 (1967).

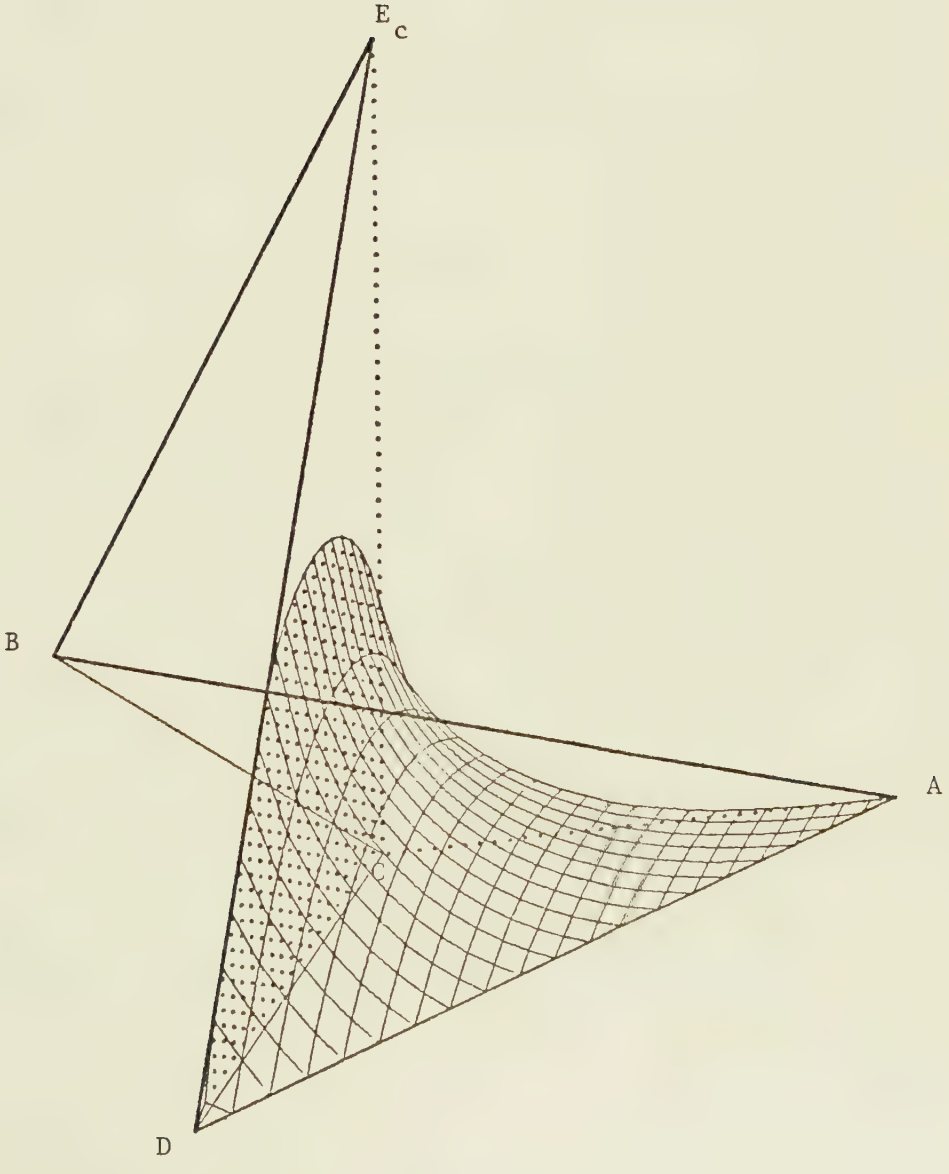
[27] VAN DE WIELE, J.P. - *Resolution numérique d'un problème de contrôle optimal de valeurs propres et vecteurs propres.*
Thèse 3ème cycle, Université Paris VI (1974).

[28] VARGA, R. - *Matrix Iterative Analysis.*
Prentice Hall 1962.

[29] WEISSHAAR, T.A. - *An application of control theory methods to the optimization of structures having dynamic or aeroelastic constraints.*
SUDAAR N° 412, Stanford University, 1970.

II - RESOLUTION NUMERIQUE DU PROBLEME DES SURFACES MINIMA.

(Article paru aux "Archives for rational Mechanics and Analysis", vol.59, n°4, 1975).



Offprint from "Archive for Rational Mechanics and Analysis",
Volume 59, Number 4, 1975, P. 311–342
© by Springer-Verlag 1975
Printed in Germany

Resolution numérique du problème des surfaces minima

CLAUDE JOURON

Mémoire présenté par J.C.C. NITSCHE

§ 0. Introduction

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ de bord Γ et φ une fonction définie sur Γ. On considère dans $\mathbb{R}^3$ la courbe

$$\mathcal{G} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \varphi(x, y), (x, y) \in \Gamma\}.$$

Le problème des surfaces minima non paramétrique consiste à trouver une fonction v définie sur Ω vérifiant

$$v = \varphi \quad \text{sur } \Gamma \tag{0.1}$$

et minimisant l'intégrale

$$\int_\Omega \sqrt{1 + |\operatorname{grad} v|^2}\, dx\, dy. \tag{0.2}$$

Ce problème n'admet pas nécessairement une solution, néanmoins R. TEMAM [14] a défini, en dualisant ce problème, une solution généralisée. Cette solution vérifie l'équation d'EULER associée à (0.2) mais ne vérifie pas nécessairement (0.1), ou ne vérifie (0.1) que sur une partie de Γ.

Notre étude décrit deux algorithmes pour l'approximation des solutions généralisées au sens de [14] du problème (0.1) (0.2).

La première méthode consiste à discrétiser (0.1) (0.2) par une méthode d'éléments finis (on a préféré cette méthode de discrétisation à la méthode des différences finies, comme dans P. CONCUS [2], pour pouvoir considérer des ouverts Ω non rectangulaires). On se ramène ainsi à la minimisation d'une fonction strictement convexe sur un espace de dimension finie que l'on résoud par une méthode de relaxation (S. SCHECHTER [13]). Lorsqu'il n'y a pas de solutions exactes, cette méthode n'est pas très bonne car il apparait des discontinuités à la frontière dues au fait que la solution généralisée ne vérifie pas (0.1) exactement.

Cette approche n'est pas essentiellement originale, mais notre étude comporte la démonstration du résultate de convergence: la solution du problème discretisé, converge, lorsque le pas tend vers 0, vers *la solution généralisée* de (0.1) (0.2). Ce résultat est démontré pour simplifier dans le cas des méthodes d'éléments finis mais la démonstration est aussi valable pour toute autre méthode raisonnable de discretisation. *On résoud donc ainsi le problème de la convergence des approximations du problème des surfaces minima qui est posé par* J.C.C. NITSCHE *dans* [9].

La seconde méthode permet d'approcher directement la solution généralisée en considérant une formulation, due à GIUSTI, DE GIORGI & MIRANDA (cf. [8]) du problème des surfaces minima

$$\text{(0.3)} \qquad \inf_{v} \int_{\Omega} \sqrt{1+|\operatorname{grad} v|^2}\, dx\, dy + \int_{\Gamma} |v-\varphi|\, d\Gamma.$$

Les solutions de (0.3) sont les mêmes que les solutions généralisées de (0.1) (0.2). A présent on remarque qu'on peut aussi écrire (0.3) sous la forme d'un problème du type point selle

$$\text{(0.4)} \qquad \inf_{v} \sup_{\substack{\lambda \in L^\infty(\Gamma) \\ |\lambda(x,y)| \leq 1}} \int_{\Omega} \sqrt{1+|\operatorname{grad} v|^2}\, dx\, dy + \int_{\Gamma} \lambda(v-\varphi)\, d\Gamma.$$

La seconde méthode revient alors à discrétiser (0.3) (0.4) (à nouveau par une méthode d'éléments finis) et à résoudre le problème (0.4) discret par une méthode de point selle du type d'UZAWA [1]. L'avantage de cette méthode est qu'elle permet d'obtenir *directement* la solution généralisée de (0.1) (0.2) et il n'y a ainsi plus de discontinuités à la frontière.

D'autre part cette seconde méthode numérique permet d'étudier le comportement de la solution généralisée sur le bord et par conséquent, pour un problème donné, on pourra peut-être, au vue des résultats numériques, *conjecturer* l'existence ou la non existence d'une solution usuelle du problème des surfaces minima non paramétriques (0.1) (0.2) (pour un Ω et un φ particuliers).

Indiquons maintenant brièvement le plan de cet article. Au § I nous procédons à quelques rappels d'analyse convexe et au § II nous rappelons les résultats de [14] relatifs aux solutions généralisées du problème des surfaces minima: le § II contient également quelques compléments relatifs au problème (0.3) et à des problèmes voisins (en fait une famille de problèmes contenant (0.1) (0.2) et (0.3) et toute une classe de problèmes «intermédiaires»). Le § III traite de la discrétisation par éléments finis de (0.1) (0.2), (0.3), et des problèmes intemédiaires mentionnés ci-dessus. Il est prouvé que la solution de l'un quelconque des problèmes discrétisés converge, lorsque le pas tend vers 0, vers la solution généralisée de (0.1) (0.2). En particulier, comme il a déjà été dit, la solution du problème (0.1) (0.2) discret converge lorsque le pas tend vers 0 vers la solution généralisée de (0.1) (0.2).

Le § IV traite enfin de la résolution du problème (0.1) (0.2) discrétisé par relaxation (1ère méthode) et de la résolution du problème (0.4) discrétisé (2ème méthode) par l'algorithme de point selle.

Afin de tester ces méthodes, nous avons considéré différents exemples de problèmes (0.1) (0.2), dont certains n'admettent pas de solution. Les rèsultats numériques obtenus sont décrits dans le § V.

L'auteur remercie R. TEMAM, qui est à l'origine de cette étude, pour l'aide constante que celui-ci lui a prodigué durant l'élaboration de ce travail.

I. Dualité en optimisation convexe

Nous rappelons ici le cadre de dualité selon FENCHEL et ROCKAFELLAR (cf., par exemple, [12]). Pour les démonstrations des résultats énoncés ici et des résultats plus complets sur l'analyse convexe nous renvoyons à [3].

I.1. Généralités

Soit E un espace de Banach réel; on désigne par E^* son dual topologique que l'on munit de la topologie $\sigma(E^*, E)$. On note $\langle ., . \rangle$ la forme bilinéaire mettant en dualité E et E^*. Soit G une fonction de E dans $]-\infty, +\infty]$, convexe, propre et semi-continue inférieurement (S.C.I); G^* désignera sa conjuguée

$$G^*: E^* \mapsto]-\infty, +\infty],$$

$$G^*(y^*) = \operatorname*{Sup}_{y \in E} \{\langle y^*, y \rangle - G(y)\}, \qquad \forall\ y^* \in E^*.$$

G^* est également convexe, propre et semi-continue inférieurement sur E^*.

On appelle sous-différentiel de G en y, la partie de E^*, notée $\partial G(y)$, définie par

$$\partial G(y) = \{y^* \in E^* \mid 0 = G^*(y^*) + G(y) - \langle y^*, y \rangle\} \tag{I.2}$$

et on appelle sous-differentiel à ε près de G en y, l'ensemble

$$\partial_\varepsilon G(y) = \{y^* \in E^* \mid 0 \leqq G^*(y^*) + G(y) - \langle y^*, y \rangle \leqq \varepsilon\} \qquad (\varepsilon > 0). \tag{I.3}$$

Sur les sous-différentiels à ε près on a le résultat suivant.

Proposition I.1. *Soit G une fonction convexe propre et S.C.I. de E (espace de Banach) dans $]-\infty, +\infty]$.*

Alors si $y^* \in \partial_\varepsilon G(y)$ il existe $y_\varepsilon^* \in Y^*$ et $y_\varepsilon \in Y$ tels que

$$\|y_\varepsilon^* - y^*\| \leqq \sqrt{\varepsilon}, \qquad \|y_\varepsilon - y\| \leqq \sqrt{\varepsilon},$$

et $y_\varepsilon^* \in \partial G(y_\varepsilon)$.

I.2. Dualité en optimisation convexe

Soient V et Y deux espaces de Banach réels, Λ un opérateur linéaire continu de V dans Y, $\Lambda \in \mathscr{L}(V, Y)$, et F (resp. G) une fonction convexe propre et S.C.I. de V dans $]-\infty, +\infty]$ (resp. de Y dans $]-\infty, +\infty]$). On désigne par V^* (resp. Y^*) le dual topologique de V (resp. Y), par F^* (resp. G^*) la fonction conjuguée de F (resp. G), et par Λ^* l'adjoint de Λ, $\Lambda^* \in \mathscr{L}(Y^*, V^*)$.

On s'intéresse au problème d'optimisation suivant:

$$\mathscr{P} \qquad \operatorname*{Inf}_{v \in V} \{F(v) + G(\Lambda v)\}.$$

On appelle problème dual de $\mathscr{P}$ le problème

$$\mathscr{P}^* \qquad \operatorname*{Sup}_{p^* \in Y^*} \{-F^*(\Lambda^* p^*) - G^*(-p^*)\}.$$

On note $\operatorname{Inf} \mathscr{P}$ l'infimum du problème $\mathscr{P}$ et on appelle solution de $\mathscr{P}$ tout élément de V qui réalise cet infimum, avec notation et définition analogues pour le problème $\mathscr{P}^*$.

Sous les hypothèses précédentes et si $\operatorname{Inf} \mathscr{P} > -\infty$ on a les deux résultats suivants:

Proposition I.2. *S'il existe $u_0 \in V$ tel que $F(u_0) < +\infty$ et si G est continue en Λu_0, alors le problème $\mathscr{P}^*$ admet au moins une solution $\bar{p}^*$ et*

$$\operatorname{Inf} \mathscr{P} = \operatorname{Max} \mathscr{P}^*.$$

Proposition I.3. *Les deux conditions suivantes sont équivalentes:*

i) $\bar{v}$ *est solution de* $\mathscr{P}$, $\bar{p}^*$ *est solution de* $\mathscr{P}^*$ *et* $\operatorname{Inf}\mathscr{P}=\operatorname{Sup}\mathscr{P}^*$

ii) $\bar{v}\in V$, $\bar{p}^*\in Y^*$ *et satisfont les relations dites d'extrémalité*

$$\Lambda^*\bar{p}^*\in\partial F(\bar{v}) \tag{I.4}$$

$$-\bar{p}^*\in\partial G(\Lambda\bar{v}). \tag{I.5}$$

Remarque I.1. (I.4) est équivalente à la relation suivante:

$$F(v)+F^*(\Lambda^*\bar{p}^*)=\langle\Lambda^*\bar{p}^*,\bar{v}\rangle, \tag{I.6}$$

et la relation (I.5) est équivalente à

$$G(\Lambda\bar{v})+G^*(-\bar{p}^*)=\langle-\bar{p}^*,\Lambda\bar{v}\rangle. \tag{I.7}$$

Remarque I.2. Considérons le cas où le problème $\mathscr{P}$ se présente sous la forme

$$\mathscr{2} \qquad \inf_{v\in V}\{F(v)+G_1(\Lambda_1 v)+G_2(\Lambda_2 v)\},$$

où G_1 (resp. G_2) est une fonction convexe, propre et S.C.I. de Y_1 (resp. Y_2), espace de Banach, dans $]-\infty,+\infty]$ et Λ_1 (resp. Λ_2) est une application linéaire continue de V dans Y_1 (resp. Y_2).

En posant $Y=Y_1\times Y_2$, $\Lambda=(\Lambda_1,\Lambda_2)$ et

$$G(q)=G_1(p_1)+G_2(p_2),\qquad\forall\ q=(p_1,p_2)\in Y,$$

on est ramené à un problème $\mathscr{P}$. Dans ce cas on a

$$G^*(q^*)=G_1^*(p_1^*)+G_2^*(p_2^*) \tag{I.8}$$

$$F^*(\Lambda^*q^*)=F^*(\Lambda_1^*p_1^*+\Lambda_2^*p_2^*), \tag{I.9}$$

le problème dual s'écrit

$$\mathscr{2}^* \qquad \sup_{(p_1^*,\,p_2^*)\in Y_1^*\times Y_2^*}\{-F^*(\Lambda_1^*p_1^*+\Lambda_2^*p_2^*)-G_1^*(-p_1^*)-G_2^*(-p_2^*)\}.$$

La relation d'extrémalité (I.5) se décompose ici en

$$-\bar{p}_1^*\in\partial G_1(\Lambda_1\bar{v}) \tag{I.10}$$

et

$$-\bar{p}_2^*\in\partial G_2(\Lambda_2\bar{v}), \tag{I.11}$$

c'est-à-dire

$$G_1(\Lambda_1\bar{v})+G_1^*(-\bar{p}_1^*)=\langle-\bar{p}_1^*,\Lambda_1\bar{v}\rangle, \tag{I.12}$$

$$G_2(\Lambda_2\bar{v})+G_2^*(-\bar{p}_2^*)=\langle-\bar{p}_2^*,\Lambda_2\bar{v}\rangle. \tag{I.13}$$

II. Solutions generalisées du problème des hypersurfaces minima

Soit Ω un ouvert borné et connexe de $\mathbb{R}^n$ à frontière Γ lipschitzienne. On considère l'espace de Banach non reflexif $W^{1,1}(\Omega)$, que l'on munit de la norme

$$\|v\| = \int_\Omega |v|\,dx + \|v\|_1$$

où

$$\|v\|_1 = \int_\Omega |\operatorname{grad} v|\,dx \qquad \left(|\operatorname{grad} v| = \left(\sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Rappelons que, d'après GAGLIARDO [4], il existe un opérateur trace γ_0, linéaire continu de $W^{1,1}(\Omega)$ dans $L^1(\Gamma)$ et un opérateur de relèvement continu de $L^1(\Gamma)$ dans $W^{1,1}(\Omega)$. Par conséquence, si φ est donné dans $L^1(\Gamma)$ il existe $\Phi \in W^{1,1}(\Omega)$ telle que $\gamma_0 \Phi = \varphi$ et le problème (0.1) (0.2) peut se ramener au problème

$\mathscr{P}$:
$$\inf_{v \in \Phi + W_0^{1,1}(\Omega)} \int_\Omega \sqrt{1+|\operatorname{grad} v|^2}\,dx,$$

où

$$W_0^{1,1}(\Omega) = \{v \in W^{1,1}(\Omega) \mid \gamma_0 v = 0\}.$$

Remarque II.1. Si $\mathscr{P}$ admet une solution, c'est à dire s'il existe $\bar{v} \in \Phi + W_0^{1,1}(\Omega)$ réalisant l'infimum du problème $\mathscr{P}$, $\bar{v}$ vérifie (0.1) au sens des théorèmes de trace. Le problème $\mathscr{P}$ n'admet pas toujours de solution (cf. JENKINS & SERRIN [5]), néanmoins R. TEMAM dans [14] (cf. également [3] et [6]) a défini une solution généralisée. On va maintenant rappeler les résultats correspondants.

Posons $V = W^{1,1}(\Omega)$, $\Lambda_1 = V = \operatorname{grad}$, $Y_1 = (L^1(\Omega))^n$,

(II.1)
$$G_1(p) = \int_\Omega \sqrt{1+|p|^2}\,dx \qquad \forall\, p \in Y_1,$$

et

(II.2)
$$F_\Phi(v) = \begin{cases} 0 \text{ si } v \in \Phi + W_0^{1,1}(\Omega) \\ +\infty \text{ sinon.} \end{cases}$$

Constatons que F_Φ est une fonction convexe, propre et S.C.I. de V dans $]-\infty, +\infty]$ et que G_1 est une fonction strictement convexe, propre et continue de Y_1 dans $]-\infty, +\infty]$. On établit aisément que

(II.3)
$$F_\Phi^*(\Lambda_1 p^*) = \begin{cases} \langle p^*, \Lambda_1 \Phi \rangle = \int_\Omega p^* \operatorname{grad} \Phi\,dx \quad \text{si} \quad \operatorname{div} p^* = 0, \\ +\infty \text{ sinon,} \end{cases}$$

et on démontre que

(II.4)
$$G_1^*(p^*) = \begin{cases} -\int_\Omega \sqrt{1-|p^*(x)|^2}\,dx \quad \text{si} \quad |p^*(x)| \leqq 1 \quad \text{p.p.} \\ +\infty \text{ sinon.} \end{cases}$$

Le problème $\mathscr{P}$ s'écrit

$$\inf_{v \in V} \{G_1(\Lambda_1 v) + F_\Phi(v)\}.$$

Son problème dual (cf. partie I) prend la forme

$\mathscr{P}^*$ $$\operatorname*{Sup}_{p^* \in \Gamma_1^*} \{-F_\Phi^*(\Lambda_1^* p^*) - G_1^*(-p^*)\}$$

soit

(II.5) $$\operatorname*{Sup}_{p^* \in K} \Big\{ -\int_\Omega p^*(x) \operatorname{grad} \Phi(x)\, dx + \int_\Omega \sqrt{1-|p^*(x)|^2}\, dx \Big\},$$

où

(II.6) $$K = \{p^* \in (L^\infty(\Omega))^n \mid \operatorname{div} p^* = 0,\ |p^*(x)| \leqq 1 \text{ p.p.}\}.$$

On peut appliquer les Propositions I.2. et I.3. et on déduit que le problème $\mathscr{P}^*$ admet une solution $\bar{p}^* \in K$ et

$$\operatorname{Inf} \mathscr{P} = \operatorname{Sup} \mathscr{P}^*.$$

La solution de $\mathscr{P}^*$ est unique car la fonctionnelle à maximiser est strictement concave.

De plus, si $\mathscr{P}$ admet une solution $\bar{v}$ alors $\bar{v}$ et $\bar{p}^*$ sont liés par les relations d'extrémalité (I.6) et (I.7) soit

(II.7) $$F_\Phi(\bar{v}) + F_\Phi^*(\Lambda_1^* \bar{p}^*) = \langle \Lambda_1^* \bar{p}^*, \bar{v} \rangle$$

et

(II.8) $$G_1(\Lambda_1 \bar{v}) + G_1^*(-\bar{p}^*) = \langle -\bar{p}^*, \Lambda_1 \bar{v} \rangle.$$

La première de ces deux relations ne nous apporte aucun renseignement supplémentaire, par contre la seconde permet de lier $\bar{v}$ et $\bar{p}^*$; en effet (II.8) est équivalente à

(II.9) $$|\bar{p}^*(x)| < 1 \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega$$

et

(II.10) $$\operatorname{grad} \bar{v}(x) = -\frac{\bar{p}^*(x)}{\sqrt{1-|\bar{p}^*(x)|^2}} \qquad \text{p.p.} \quad x \in \Omega,$$

ou

(II.11) $$\bar{p}^*(x) = -\frac{\operatorname{grad} \bar{v}(x)}{\sqrt{1+|\operatorname{grad} \bar{v}(x)|^2}} \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega.$$

Remarque II.2. Les relations (II.11) et $\operatorname{div} \bar{p}^* = 0$ montrent que $\bar{v}$ vérifie l'équation d'EULER du problème $\mathscr{P}$, soit

(II.12) $$\operatorname{div} \left(\frac{\operatorname{grad} v(x)}{\sqrt{1+|\operatorname{grad} v(x)|^2}} \right) = 0.$$

R. TEMAM a montré (cf. [3] ou [14]) que même si $\mathscr{P}$ ne possèdait pas de solution, l'expression

$$-\frac{\bar{p}^*(x)}{\sqrt{1-|\bar{p}^*(x)|^2}}$$

représente le gradient d'une fonction de $W^{1,1}(\Omega)$. Plus exactement on a le

Théorème II.1. *Soit $\bar{p}^*$ la solution du problème $\mathscr{P}^*$.*

i) Pour tout $\sigma \subset \bar{\sigma} \subset \Omega$ *il existe* $\eta(\sigma, \Omega) > 0$ *tel que*

$$|p^*(x)| \leqq 1 - \eta(\sigma, \Omega) \quad \text{p.p.} \quad x \in \sigma. \tag{II.13}$$

ii) Il existe une fonction $\tilde{v}$ *appartenant à* $W^{1,1}(\Omega)$ *définie à une constante additive près, liée à* $\bar{p}$ *par la relation*

$$\operatorname{grad} \tilde{v}(x) = -\frac{\bar{p}^*(x)}{\sqrt{1 - |\bar{p}^*(x)|^2}}, \tag{II.14}$$

*vérifiant l'équation d'*EULER *du problème* $\mathscr{P}$, *soit* (II.12) *et toute suite minimisante du problème* $\mathscr{P}$ *converge vers* $\tilde{v}$ *au sens suivant:*

$$v_m \to \tilde{v} \quad \textit{dans} \quad L^1(\Omega)/\mathbb{R}, \tag{II.15}$$

$$\frac{\partial v_m}{\partial x_i} \to \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_i} \quad \textit{dans} \quad L^1(\sigma) \quad \forall\, \sigma \subset\subset \Omega, \textit{ pour } i = 1, \ldots, n \tag{II.16}$$

$\tilde{v}$ *s'appelle la solution généralisée du problème des hypersurfaces minima.*

Remarque II.3. Si le problème $\mathscr{P}$ admet une solution $\bar{v}$ alors $\bar{v}$ est un représentant de la solution généralisée.

Remarque II.4. Si $\mathscr{P}$ n'admet pas de solution alors aucun représentant de $\tilde{v}$ ne vérifie la condition aux limites $\gamma_0(v - \Phi) = 0$.

Le résultat suivant donne des indications à postériori sur la partie de la frontière où la condition aux limites est satisfaite.

Théorème II.2. *Soit* $\tilde{v}$ *un représentant de la solution généralisée de* $\mathscr{P}$, *posons*

$$\Gamma_0 = \{x \in \Gamma \mid \overline{\lim_{\substack{x' \in \Omega \\ x' \to x}}} |\operatorname{grad} \tilde{v}(x')| < +\infty\}. \tag{II.17}$$

Si Γ_0 *est non vide, alors il existe un et un seul représentant* $\tilde{v}$ *de la solution généralisée de* $\mathscr{P}$ *vérifiant*

$$v = \Phi \quad \textit{sur} \quad \Gamma_0$$

et pour toute suite minimisante v_m *on a*

$$v_m \to \tilde{v} \quad \textit{dans} \quad L^1(\Omega),$$

$$\frac{\partial v_m}{\partial x_i} \to \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_i} \quad \textit{dans} \quad L^1(\sigma), \quad \forall\, \sigma \subset\subset \Omega,\ i = 1, \ldots, n.$$

Remarque II.5. On a également le résultat suivant: si on suppose Ω régulier de classe $\mathscr{C}^2$, si l'on pose

$$\Gamma_+ = \left\{ x \in \Gamma \,\middle|\, \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \nu} = +\infty \right\}$$

$$\Gamma_- = \left\{ x \in \Gamma \,\middle|\, \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \nu} = -\infty \right\}$$

ν désignant la normale extérieure à Γ, alors on peut augmenter Φ sur Γ_+ diminuer Φ sur Γ_- sans que la solution généralisée ne change.

Remarque II.6. On va essayer, en approximant le problème $\mathscr{P}$, d'exhiber une suite convergeant vers un représentant de la solution généralisée. La discrétisation du problème $\mathscr{P}$ impose $v=\Phi$ sur le bord, ce qui pertubera la solution obtenue au voisinage des points de Γ où la condition aux limites n'est pas satisfaite. Aussi a-t-on songé à la formulation du problème due à GIUSTI, DEGIORGI et MIRANDA (cf. [8])

$$\mathscr{P}_G \qquad \inf_{v\in W^{1,1}(\Omega)} \int_\Omega \sqrt{1+|\operatorname{grad} v|^2}\,dx+\int_\Gamma |v-\varphi|\,d\Gamma.$$

En fait on va considérer un problème intermédiaire entre $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}_G$ soit

$$\mathscr{Q} \qquad \inf_{v-\Phi\in V_1} \left\{\int_\Omega \sqrt{1+|\operatorname{grad} v|^2}\,dx+\int_{\Gamma_2} |v-\varphi|\,d\Gamma\right\},$$

où (Γ_1,Γ_2) est une partition de Γ et

$$V_1=\{v\in W^{1,1}(\Omega)\,|\,\gamma_0 v|_{\Gamma_1}=0\}.$$

Afin de comparer les problèmes $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ nous allons expliciter le problème dual de $\mathscr{Q}$. Pour cela on pose

$$E_\Phi(v)=\begin{cases}0 & \text{si } v-\Phi\in V_1\\ +\infty & \text{sinon}\end{cases} \tag{II.18}$$

$$G_{2,\Phi}(p_2)=\int_{\Gamma_2}|p_2-\varphi|\,d\Gamma, \qquad \forall\, p_2\in Y_2=L^1(\Gamma_2), \tag{II.19}$$

$$Y=Y_1\times Y_2=(L^1(\Omega))^n\times L^1(\Gamma_2)$$

$$G_\Phi(q)=G_1(p_1)+G_{2,\Phi}(p_2), \qquad \forall\, q=(p_1,p_2)\in Y \tag{II.20}$$

et

$$\Lambda v=(\Lambda_1 v,\Lambda_2 v), \qquad \forall\, v\in V=W^{1,1}(\Omega),$$

où

$$\Lambda_2 v=\gamma_0 v|_{\Gamma_2}, \qquad \Lambda_2\in\mathscr{L}(V,Y_2).$$

On rappelle que $\Lambda_1=\operatorname{grad}$ et que G_1 est définie par (II.1).

Le problème $\mathscr{Q}$ s'écrit alors

$$\mathscr{Q} \qquad \inf_{v\in V}\{E_\Phi(v)+G_\Phi(v)\}=\inf_{v\in V}\{E_\Phi(v)+G_1(\Lambda_1 v)+G_{2,\Phi}(\Lambda_2 v)\}$$

et son problème dual

$$\mathscr{Q}^* \qquad \sup_{(p_1^*,p_2^*)\in Y_1^*\times Y_2^*}\{-E_\Phi^*(\Lambda_1^* p_1^*+\Lambda_2^* p_2^*)-G_1(-p_1^*)-G_{2,\Phi}^*(-p_2^*)\}.$$

D'après la Proposition I.2 on a existence d'au moins une solution du problème $\mathscr{Q}^*$, et comme G_1^* est strictement convexe on a unicité de cette solution.

Lemme II.1. *Si Ω est suffisamment régulier, on a*

$$(II.21)\quad E_\Phi^*(\Lambda_1^* p_1^* + \Lambda_2^* p_2^*) = \begin{cases} \int_{\Gamma_2} p_2^* \varphi \, d\Gamma + \int_\Omega \operatorname{grad} \Phi \, p_1^* \, dx \\ \qquad si \ \operatorname{div} p_1^* = 0 \quad et \ si \ p_1^* \nu|_{\Gamma_2} + p_2^* = 0, \\ +\infty \quad sinon. \end{cases}$$

Démonstration. On désigne par Λ le membre de gauche de (II.21). On sait que

$$\Lambda = \operatorname*{Sup}_{v - \Phi \in V_1} \{\langle p_1^*, \Lambda_1 v\rangle + \langle p_2^*, \Lambda_2 v\rangle\},$$

d'où

$$(II.22)\quad \Lambda = \langle p_2^*, \Lambda_2 \Phi\rangle + \langle p_1^*, \Lambda_1 \Phi\rangle + \operatorname*{Sup}_{\omega \in V_1} \left\{ \int_\Omega p_1^* \operatorname{grad} w \, dx + \int_{\Gamma_2} p_2^* \gamma_0 w \, d\Gamma \right\}.$$

Comme $\mathcal{D}(\Omega)$ est inclus dans V_1 on a

$$\operatorname*{Sup}_{\omega \in V_1} \left\{ \int_\Omega p_1^* \operatorname{grad} w \, dx + \int_{\Gamma_2} p_2^* \gamma_0 w \, d\Gamma \right\} \geqq \operatorname*{Sup}_{\omega \in \mathcal{D}(\Omega)} \{-\langle \operatorname{div} p_1^*, w\rangle\}.$$

Cette dernière quantité vaut 0 si $\operatorname{div} p_1^* = 0$ et $+\infty$ sinon, en sorte que

$$E_\Phi^*(\Lambda_1^* p_1^* + \Lambda_2^* p_2^*) = +\infty \qquad \text{si } \operatorname{div} p_1^* \neq 0.$$

Supposons donc $\operatorname{div} p_1^* = 0$. D'après le lemme II.2, énonçé plus loin, on peut écrire

$$\int_\Omega \operatorname{grad} w \, p_1^* \, dx + \int_{\Gamma_2} p_2^* \gamma_0 q \, d\Gamma = \int_{\Gamma_2} (\gamma_\nu p_1^* + p_2) \gamma_0 w \, d\Gamma.$$

Le supremum de cette quantité sur V_1 est nul si $\gamma_\nu p_1^*|_{\Gamma_2} + p_2 = 0$ et vaut $+\infty$ sinon.

On reporte ce résultat dans (II.22), et la démonstration du lemme est terminée.

Lemme II.2. *On suppose Ω assez régulier*[1]. *Soit*

$$E = \{p \in (L^2(\Omega))^n \mid \operatorname{div} p \in L^2(\Omega)\}$$

muni du produit scalaire

$$(p, q) = (p, q)_{(L^2(\Omega))^n} + (\operatorname{div} p, \operatorname{div} q)_{L^2(\Omega)}, \qquad \forall\, (p, q) \in E^2.$$

Alors on a les propriétés suivantes:

i) $\mathcal{D}(\bar{\Omega})^n$ est dense dans E;

ii) il existe une application $\gamma_\nu \in \mathcal{L}(E, H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))$ telle que $\gamma_\nu p = p \cdot \nu|_\Gamma$ si $p \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$, ν étant le vecteur unitaire normal à la frontière; et l'on a la formule de Stokes suivante

$$(II.23)\qquad (p, \operatorname{grad} q) + (\operatorname{div} p, q) = \langle \gamma_\nu p, \gamma_0 q\rangle, \qquad \forall\, q \in H^1(\Omega), \quad \forall\, p \in E;$$

iii) si en outre $p \in (L^\infty(\Omega))^n$ et $\operatorname{div} p \in L^\infty(\Omega)$ alors $\gamma_\nu p \in L^\infty(\Gamma)$,

$$(II.24)\qquad \|\gamma_\nu p\|_{L^\infty(\Gamma)} \leqq \|p\|_{L^\infty(\Omega)^n}$$

---

[1] Il suffit par exemple que $\partial\Omega$ soit une variété de classe $\mathcal{C}^2$ et que Ω soit situé localement d'un seul côté de $\partial\Omega$.

et l'on a la formule de Stokes suivante

$$(\text{II.25}) \qquad (p, \operatorname{grad} q)+(\operatorname{div} p, q)=\int_{\Gamma} \gamma_\nu p \gamma_0 q \, d\Gamma \quad \forall\, q \in W^{1,1}(\Omega).$$

La démonstration des points *i)* et *ii)* de ce lemme est donnée dans LIONS-MAGENES [7]; cf. aussi R. TEMAM [15]. On établit *iii)* en analysant la démonstration de *i)* donnée en [15].

Lemme II.3.

$$(\text{II.26}) \qquad G^*_{2,\Phi}(p_2^*)=\begin{cases} \displaystyle\int_{\Gamma_2} p_2^* \varphi \, d\Gamma & \text{si } |p_2^*(x)| \leqq 1 \text{ p.p. } x \in \Gamma_2 \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} G^*_{2,\Phi}(p_2^*) &= \sup_{p_2 \in L^1(\Gamma_2)} \left\{ \int_{\Gamma_2} p_2 p_2^* \, d\Gamma - \int_{\Gamma_2} |p_2 - \varphi| \, d\Gamma \right\} \\ &= \int_{\Gamma_2} \varphi \; p_2^* \, d\Gamma + \sup_{q_2 \in L^1(\Gamma_2)} \left\{ \int_{\Gamma_2} (q_2 p_2^* - |q_2|) d\Gamma \right\} \end{aligned}$$

ce qui démontre le résultat.

Compte tenu des lemmes II.1 et II.3 et de la relation (II.4) le problème dual de $\mathscr{Q}$ s'écrit

$$\sup_{q^*=(p_1^*, p_1^*) \in K_1} \left\{ -\int_{\Omega} \operatorname{grad} \Phi \, p_1^* \, dx + \int_{\Omega} \sqrt{1-|p_1^*|^2} \, dx \right\},$$

où

$$K_1 = \{(p_1^*, p_2^*) \mid \; p_1^* \in K,\ \gamma_\nu p_1^*|_{\Gamma_2} + p_2^* = 0,\ |p_2^*(x)| \leqq 1 \text{ p.p } x \in \Gamma_2\},$$

où K est définie en (II.6). On retombe ainsi sur (II.5) problème dual de $\mathscr{P}$.

On vient de montrer le

Théorème II.3. *i) Le problème $\mathscr{Q}^*$ admet une et une seule solution $(\bar{p}_1^*, \bar{p}_2^*)$.*

ii) $\inf \mathscr{Q} = \sup \mathscr{Q}^* = \sup \mathscr{P}^* = \inf \mathscr{P}$.

iii) Si $\bar{p}$ est la solution de $\mathscr{P}^*$, alors

$$\bar{p}_1^* = \bar{p}^*$$

et

$$\bar{p}_2^* = -\gamma_\nu \bar{p}_1^*|_{\Gamma_2}$$

Remarque II.6. Si le problème $\mathscr{P}$ admet une solution $\bar{v}$, alors $\bar{v}$ est solution de $\mathscr{Q}$; la réciproque n'est pas nécessairement vraie.

Remarque II.7. Si $\mathscr{Q}$ admet une solution $\bar{\bar{v}}$, les relations d'extrémalité (I.12) et (I.13) impliquent

$$|\bar{p}^*(x)| < 1 \quad \text{p.p. } x \in \Omega,$$

$$\operatorname{grad} \bar{\bar{v}}(x) = -\frac{\bar{p}^*(x)}{\sqrt{1-|\bar{p}^*(x)|^2}} \quad \text{p.p. } x \in \Omega,$$

$$|\bar{p}_2^*(x)| \leqq 1 \quad \text{p.p. } x \in \Gamma_2$$

et

$$\bar{p}_2^*(x)=\operatorname{signe}(\varphi-\bar{v})(x)1 \qquad \text{si } \varphi(x)\neq\bar{v}(x).$$

Comme $\bar{v}$ vérifie (II.14), $\bar{v}$ est un représentant de la solution généralisée de $\mathscr{P}$.

Remarque II.8. Le choix de Γ_1 est très important. Il faudrait le pendre inclus dans Γ_0 (cf. (II.17)) puisque sur Γ_0 la solution généralisée vérifie la condition aux limites $\gamma_0(v-\varphi)=0$. Rappelons toutefois que Γ_0 n'est pas connu à priori.

III. Discrétisation des problèmes par la methode des élements finis

On suppose $n=2$ et on va décrire la discrétisation du problème des surfaces minima et des problèmes voisins par une méthode d'éléments finis, successivement, dans le cas où Ω est à frontière polygonale et dans le cas Ω quelconque.

On se propose de décrire les problèmes approchés et la manière dont ils approximent les problèmes exacts. Au n° IV on étudiera la résolution effective des problèmes approchés.

III.1. Cas d'un ouvert à frontière polygonale

Etant donné un paramètre h, destiné à tendre vers zéro, on associe une triangulation $\mathscr{T}_h$ de Ω telle que la réunion des triangles fermés de $\mathscr{T}_h$ soit $\bar{\Omega}$.

On suppose que

i) tout triangle de $\mathscr{T}_h$ a un diamètre inférieur ou égal à h,

ii) deux triangles de $\mathscr{T}_h$ ont, soit une intersection vide, soit une intersection réduite à un côté commun ou à un sommet commun;

iii) $\mathscr{T}_h$ est une suite régulière de triangulations de Ω, c'est-à-dire si $\bar{\omega}(h)$ est le plus petit des angles de tous les triangles de $\mathscr{T}_h$ on a $\bar{\omega}(h)\geqq\bar{\omega}>0$ pour tout h;

iv) si Γ_1 et Γ_2 ont des extrémités communes alors ce sont des noeuds de la triangulation.

V_h désigne l'ensemble des fonctions affines sur chaque triangle de $\mathscr{T}_h$ et continues sur $\bar{\Omega}$, donc V_h est inclus dans $W^{1,1}(\Omega)$. On pose

$$V_{h,1}=\{v_h\in V_h \mid v_h|_{\Gamma_1}=0\}, \qquad V_{h,1}\subset V_1.$$

Pour tout $v\in\mathscr{C}^2(\bar{\Omega})$ on définit

$$r_h v=v_h,$$

où v_h est la fonction de V_h telle que $v_h(N)=v(N)$ pour tout noeud N de la triangulation.

Lemme III.1. *Pour tout $v\in W^{1,1}(\Omega)$ et tout $h>0$ il existe $v_h\in V_h$ telle que si $v\in\mathscr{C}^2(\bar{\Omega})$, $v_h=r_h v$ et v_h converge vers v dans $W^{1,1}(\Omega)$ quand h tend vers 0. Si $v\in V_1$, alors il existe $v_h\in V_{h,1}$ vérifiant les mêmes propriétés.*

Démonstration. La triangulation $\mathscr{T}_h$ étant régulière on a, si $v\in\mathscr{C}^2(\bar{\Omega})$,

$$\|r_h v-v\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}\leqq\frac{ch}{\sin\bar{\omega}}\|v\|_{2,\infty},$$

où

$$\|v\|_{2,\infty} = \operatorname*{Max}_{\ell=2} \operatorname*{Sup}_{x\in\Omega} |D^{\ell} v(x)| \quad \text{(cf. [11])}.$$

On en déduit

$$r_h v \to v \quad \text{dans } W^{1,\infty}(\Omega) \text{ quand } h \to 0;$$

donc a fortiori

$$r_h v \to v \quad \text{dans } W^{1,1}(\Omega)$$

et ceci nous donne le résultat si $v \in \mathscr{C}^2(\bar{\Omega})$.

Si $v \in W^{1,1}(\Omega)$ et si $v \notin \mathscr{C}^2(\bar{\Omega})$, on procède par densité, $\mathscr{C}^2(\bar{\Omega})$ étant dense dans $W^{1,1}(\Omega)$. Si $v \in V_1$, on considère $\mathscr{C}^2(\bar{\Omega}) \cap V_1$ et on aboutit au même résultat. Donc si $\Phi \in W^{1,1}(\Omega)$, on peut construire pour tout h, $\Phi_h \in V_h$ telle que

$$\Phi_h \to \Phi \quad \text{dans } W^{1,1}(\Omega) \text{ quand } h \to 0.$$

On pose $\varphi_h = \Phi_h|_{\Gamma}$.

Pour approximer le problème $\mathscr{Q}$, on considère le problème

$$\mathscr{Q}_h \qquad \operatorname*{Inf}_{v_h \in \Phi_h + V_{h,1}} \left\{ \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\operatorname{grad} v|^2}\, dx + \int_{\Gamma_2} |v_h - \varphi_h|\, d\Gamma \right\}$$

que l'on peut écrire avec les notations de II (II.19) et (II.20)

$$\operatorname*{Inf}_{v \in \Phi_h + V_{h,1}} \{G_{\Phi_h}(\Lambda v_h)\},$$

ou

$$\operatorname*{Inf}_{v \in \Phi_h + V_{h,1}} \{G_1(\Lambda_1 v_h) + G_{2,\Phi_h}(\Lambda_2 v_h)\}.$$

La fonctionnelle à minimiser est convexe continue sur $W^{1,1}(\Omega)$, donc sur V_h, de plus si $\operatorname{mes}(\Gamma_1) \neq 0$

$$\lim_{\substack{\|v_h\| \to \infty \\ v_h \in \Phi_h + V_{h,1}}} G_{\Phi_h}(\Lambda v_h) = +\infty.$$

En effet

$$\lim_{\substack{\|v_h\| \to \infty \\ v_h \in \Phi_h + V_{h,1}}} \|v_h\|_1 = +\infty,$$

car si $\operatorname{mes}(\Gamma_1) \neq 0$, $\|\cdot\|_1$ est une norme sur V_1, équivalente à la norme $\|\cdot\|$.

Dans ce cas la fonctionnelle est strictement convexe sur $\Phi_h + V_{h,1}$ (car $v \to \Lambda_1 v = \operatorname{grad} v$ est injective sur V_1).

V_h étant un espace de dimension finie donc reflexif pour la topologie usuelle, on a existence et unicité d'un élément $\bar{v}_{h,1}$ de $\Phi_h + V_{h,1}$, solution de $\mathscr{Q}_h$, d'où

Proposition III.1. *Si* $\operatorname{mes} \Gamma_1 \neq 0$, *alors le problème* $\mathscr{Q}_h$ *admet une et une seule solution* $\bar{v}_{h,1}$.

Remarque III.1. Si $\operatorname{mes} \Gamma_1 = 0$, on a l'existence d'une solution de $\mathscr{Q}_h$, car $\|v\|_1 + \int_{\Gamma} |v|\, d\Gamma$ est une norme sur $W^{1,1}(\Omega)$ équivalente à la norme habituelle et par conséquent

$$\int_{\Omega} \sqrt{1 + |\operatorname{grad} v_h|^2}\, dx + \int_{\Gamma} |v_h - \varphi_h|\, d\Gamma \to +\infty \quad \text{quand } h \to \infty$$

mais on n'est pas sûr de l'unicité.

$\bar{v}_{h,1}$ approxime la solution généralisée de $\mathscr{P}$, car l'on va montrer le résultat suivant.

Théorème III.1. *Si $\bar{v}_{h,1}$ est la solution de Q_h et si $\tilde{v}$ est la solution généralisée de $\mathscr{P}$, alors $\bar{v}_{h,1}$ converge vers $\tilde{v}$ au sens suivant:*

$$\bar{v}_{h,1} \to \tilde{v} \quad \text{dans } L^1(\Omega)/\mathbb{R}, \tag{III.1}$$

$$\frac{\partial \bar{v}_{h,1}}{\partial x_i} \to \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_i} \quad \text{dans } L^1(\sigma), \quad \forall\, \sigma \subset\subset \Omega,\ i=1,2. \tag{III.2}$$

Remarque III.2. Si $\mathscr{Q}$ admet une solution $\bar{v}$, alors $\bar{v}$ est un représentant de la solution généralisée et au lieu de (III.1) on a

$$\bar{v}_{h,1} \to \bar{v} \quad \text{dans } L^1(\Omega). \tag{III.3}$$

Pour démontrer ce théorème on va d'abord établir quelques lemmes.

Lemme III.2. $\overline{\lim_{h\to 0}}\,(\operatorname{Inf}\mathscr{Q}_h) \leqq \operatorname{Inf}\mathscr{P}$.

Démonstration. Soit $v \in \Phi + V_1$, $v = \Phi + w$ où $w \in V_1$ et soit $w_h \in V_{h,1}$ une approximation de w (cf. Lemme III.1.). On pose

$$v_h = \Phi_h + w_h.$$

Notons que, puisque w_h et Φ_h convergent respectivement vers w et Φ, v_h converge vers v dans $W^{1,1}(\Omega)$.

L'application $G_1 \circ \Lambda_1$ est continue sur $W^{1,1}(\Omega)$, de plus $G_{2,\Phi_h}(\gamma_0 v_h)$ converge vers $G_{2,\Phi}(\gamma_0 v)$ quand h tend vers 0, par conséquent on *a*: étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $h_0 > 0$ tel que $\forall\, h \leqq h_0$

$$G_1(\Lambda_1 v_h) + G_{2,\Phi_h}(\gamma_0 v_h) \leqq G_1(\Lambda_1 v) + G_{2,\Phi}(\gamma_0 v) + \varepsilon.$$

On en déduit

$$\operatorname{Inf} Q_h \leqq G_\Phi(\Lambda v) + \varepsilon,$$

d'où

$$\overline{\lim}\,(\operatorname{Inf} Q_h) \leqq G_\Phi(\Lambda v) + \varepsilon$$

et ceci pour tout $v \in \Phi + V_1$ et tout $\varepsilon > 0$, d'où le résultat.

Comme $\Phi_h \in W^{1,1}(\Omega)$, on peut considérer les problèmes auxiliaires suivants:

$$\mathscr{P}_{\Phi_h} \qquad \inf_{v \in \Phi_h + W_0^{1,1}(\Omega)} G_1(\Lambda_1 v)$$

et

$$\mathscr{Q}_{\Phi_h} \qquad \inf_{v \in \Phi_h + V_1} G_{\Phi_h}(\Lambda v).$$

D'après le résultat *ii)* du Théorème II.3 on voit que

$$\operatorname{Inf}\mathscr{P}_{\Phi_h} = \operatorname{Sup}\mathscr{P}^*_{\Phi_h} = \operatorname{Sup}\mathscr{Q}^*_{\Phi_h} = \operatorname{Inf}\mathscr{Q}_{\Phi_h}. \tag{III.4}$$

Lemme III.3. $\operatorname{Inf}\mathscr{Q}_{\Phi_h} \to \operatorname{Inf}\mathscr{P}$ *quand* $h \to 0$.

Démonstration. D'après (II.5),

$$\operatorname{Sup}\mathscr{P}^*_{\Phi_h} = \operatorname{Sup}_{p^* \in K} \left\{ -\int_\Omega p^*(x) \operatorname{grad} \Phi_h(x)\, dx + \int_\Omega \sqrt{1 - |p^*(x)|^2}\, dx \right\}$$

et

$$\operatorname{Sup}\mathscr{P}^* = \operatorname{Sup}_{p^* \in K} \left\{ -\int_\Omega p^*(x) \operatorname{grad} \Phi(x)\, dx + \int_\Omega \sqrt{1-|p^*(x)|^2}\, dx \right\}$$

et comme Φ_h converge vers Φ dans $W^{1,1}(\Omega)$, on a

$$\operatorname{Sup}\mathscr{P}^*_{\Phi_h} \to \operatorname{Sup}\mathscr{P}^*,$$

d'où le résultat, compte tenu de (III.4) et du Théorème II.3.

Lemme III.4. $\lim_{h\to 0} (\operatorname{Inf}\mathscr{Q}_h) = \operatorname{Inf}\mathscr{P}$.

Démonstration. Pour montrer cette égalité, et comme

$$\overline{\lim_{h\to 0}} (\operatorname{Inf}\mathscr{Q}_h) \leqq \operatorname{Inf}\mathscr{P},$$

il suffit de montrer

(III.5) $$\underline{\lim_{h\to 0}} (\operatorname{Inf}\mathscr{Q}_h) \geqq \operatorname{Inf}\mathscr{P}.$$

Or (III.5) se déduit de l'inégalité

$$\operatorname{Inf}\mathscr{Q}_{\Phi_h} \leqq \operatorname{Inf}\mathscr{Q}_h \qquad (\Phi_h + V_{h,1} \subset \Phi_h + V_1)$$

et du Lemme III.3.

On rappelle que $\bar{v}_{h,1}$ et $\bar{p}^*$ désignent respectivement les solutions de $\mathscr{Q}_h$ et $\mathscr{P}^*$, que $\bar{q}^* = (\bar{p}_1^*, \bar{p}_2^*) = (\bar{p}^*, -\bar{p}^* \cdot \nu|_{\Gamma_2})$ est la solution de $\mathscr{Q}$ et que $E_{\Phi_h}(v)$ est défini par (II.18). On a le résultat suivant.

Lemme III.5. *Ils existent $\rho_1(h)$ et $\rho_2(h)$ tendant vers 0 quand h tend vers 0, tels que*

(III.6) $$A = \operatorname{Inf}\mathscr{Q}_h = G_{\Phi_h}(\Lambda \bar{v}_{h,1}) + E_{\Phi_h}(\bar{v}_{h,1}) = \operatorname{Inf}\mathscr{P} + \rho_1(h),$$

(III.7) $$B = -G^*_{\Phi_h}(-\bar{q}^*) - E^*_{\Phi_h}(\Lambda^* \bar{q}^*) = \operatorname{Inf}\mathscr{P} + \rho_2(h).$$

Démonstration. Comme $\bar{v}_{h,1}$ est la solution de $\mathscr{Q}_h$, $E_{\Phi_h}(\bar{v}_{h,1}) = 0$ et

$$\operatorname{Inf}\mathscr{Q}_h = G_{\Phi_h}(\Lambda \bar{v}_{h,1}).$$

De plus, d'après le Lemme III.4, on a

$$\operatorname{Inf}\mathscr{Q}_h = \operatorname{Inf}\mathscr{P} + \rho_1(h) \qquad \text{où } \rho_1(h) \to 0 \text{ quand } h \to 0;$$

d'où (III.6).

$$B = -G^*_{\Phi}(-\bar{q}^*) - E^*_{\Phi}(\Lambda^* \bar{q}^*) + \rho_2(h) = \operatorname{Sup}\mathscr{P}^* + \rho_2(h),$$

où

$$\rho_2(h) = G^*_{\Phi}(-\bar{q}^*) - G^*_{\Phi_h}(-\bar{q}^*) + E^*_{\Phi}(\Lambda^* \bar{q}^*) - E^*_{\Phi_h}(\Lambda^* \bar{q}^*).$$

(I.8), (II.4), (II.27), (II.21) impliquent

$$\rho_2(h) = \int_\Omega (\operatorname{grad}\Phi - \operatorname{grad}\Phi_h)\, dx,$$

de sorte que

$$\rho_2(h) \to 0.$$

Démonstration du théorème III.1. On a

$$\text{(III.8)} \qquad \begin{aligned} A-B=&\{G_{\Phi_h}(\Lambda\bar{v}_{h,1})+G^*_{\Phi_h}(-\bar{q}^*)-\langle -\bar{q}^*, \Lambda\bar{v}_{h,1}\rangle\}\\ &+\{E_{\Phi_h}(\bar{v}_{h,1})+E^*_{\Phi_h}(\Lambda^*\bar{q}^*)-\langle \Lambda^*\bar{q}^*, \bar{v}_{h,1}\rangle\}. \end{aligned}$$

D'après la définition des fonctionnelles conjuguées (I.1), les quantités entre accolades sont positives, d'où

$$\text{(III.9)} \qquad \rho_3(h)=A-B\geqq 0$$

et

$$\text{(III.10)} \qquad 0\leqq G_{\Phi_h}(\Lambda\bar{v}_{h,1})+G^*_{\Phi_h}(-\bar{q}^*)-\langle -\bar{q}^*, \Lambda\bar{v}_{h,1}\rangle\leqq\rho_3(h).$$

Notons que, d'après (III.6) et (III.7),

$$\rho_3(h)=\rho_1(h)-\rho_2(h)\to 0 \quad \text{quand } h\to 0.$$

(III.10) s'écrit encore

$$\begin{aligned} 0\leqq&\{G_1(\Lambda_1\bar{v}_{h,1})+G_1^*(-\bar{p}^*)-\langle -\bar{p}^*, \Lambda_1\bar{v}_{h,1}\rangle\}\\ &\{G_{2,\Phi_h}(\gamma_0\bar{v}_{h,1})+G_{2,\Phi_h}(\gamma_0\bar{v}_{h,1})-\langle -\bar{p}_2^*, \gamma_0\bar{v}_{h,1}\rangle\}\leqq\rho_3(h). \end{aligned}$$

Les quantités entre accolades étant positives, on en déduit que

$$\text{(III.11)} \qquad 0\leqq G_1(\Lambda_1\bar{v}_{h,1})+G_1^*(-\bar{p}^*)-\langle -\bar{p}^*, \Lambda_1\bar{v}_{h,1}\rangle\leqq\rho_3(h),$$

en sorte que

$$-\bar{p}^*\in\hat{\partial}_{\rho_3(h)}G_1(\Lambda_1\bar{v}_{h,1}).$$

D'après la Proposition I.1, on sait qu'il existe alors $p_h^*\in(L^\infty(\Omega))^n$ et $p_h\in(L^1(\Omega))^n$ tels que

$$\text{(III.12)} \qquad \|p_h^*-\bar{p}^*\|_{(L^\infty(\Omega))^n}\leqq\sqrt{\rho_3(h)},$$

$$\text{(III.13)} \qquad \|p_h-\Lambda_1\bar{v}_{h,1}\|_{(L^1(\Omega))^n}\leqq\sqrt{\rho_3(h)}$$

et

$$-p_h^*\in\partial G(p_h),$$

c'est-à-dire p_h^* vérifie

$$\text{(III.14)} \qquad G_1^*(-p_h^*)+G_1(p_h)-\langle -p_h^*, p_h\rangle=0.$$

Cette relation implique

$$\text{(III.15)} \qquad |p_h^*(x)|<1 \quad \text{p.p. } x\in\Omega$$

et

$$\text{(III.16)} \qquad p_h(x)=-\frac{p_h^*(x)}{\sqrt{1-|p_h^*(x)|^2}} \quad \text{p.p. } x\in\Omega.$$

D'autre part, d'après III.12.

$$p_h^*\to\bar{p}^* \quad \text{dans } (L^\infty(\Omega))^n \text{ quand } h\to 0,$$

donc, quitte à extraire une nouvelle sous-suite, on peut supposer que

$$p_h^*(x) \to \bar{p}^*(x) \quad \text{p.p.}$$

D'après le Théorème II.1. on a

$$\forall\, \sigma \subset \bar{\sigma} \subset \Omega \quad |\bar{p}^*(x)| \leqq 1 - \eta(\sigma) \quad \text{p.p. dans } \sigma.$$

Donc on peut supposer que, pour h assez petit,

$$|p_h^*(x)| \leqq 1 - \tfrac{1}{2}\eta(\sigma) \quad \text{p.p. dans } \sigma.$$

D'après le théorème de Lebesgue, on peut affirmer que

$$p_h = -\frac{p_h^*}{\sqrt{1-|p_h^*|^2}} \to \frac{-\bar{p}^*}{\sqrt{1-|\bar{p}^*|^2}} \quad \text{dans } (L^1(\sigma))^n$$

et en raison de (II.14) et (III.13) on obtient

$$\text{grad}\, \bar{v}_{h,1} \to \text{grad}\, \tilde{v} \quad \text{dans } (L^1(\sigma))^n. \tag{III.17}$$

Montrons maintenant que $\bar{v}_{h,1}$ est borné dans $W^{1,1}(\Omega)$. D'après le Lemme III.4 on a

$$\text{Inf}\, \mathcal{Q}_h \leqq \text{cste},$$

donc

$$\|\bar{v}_{h,1}\|_1 = \int_\Omega |\text{grad}\, \bar{v}_{h,1}|\, dx \leqq c_1.$$

$\bar{v}_{h,1} - \Phi_h \in V_1$ et sur V_1, si mes $\Gamma_1 \neq 0$, $\|\cdot\|_1$ est une norme équivalente à $\|\cdot\|$ (cf. Remarque III.2 si mes $\Gamma_1 = 0$); par suite

$$\|\bar{v}_{h,1} - \Phi_h\| \leqq c_2 \|\bar{v}_{h,1} - \Phi_h\|_1 \leqq c_3 + c_2 \|\Phi_h\| \leqq c_4,$$

d'où

$$\|\bar{v}_{h,1}\| \leqq c_5.$$

$\bar{v}_{h,1}$ étant borné dans $W^{1,1}(\Omega)$ on peut, quitte à en extraire une nouvelle sous-suite, supposer que

$$\bar{v}_{h,1} \to v_1 \quad \text{dans } L^1(\Omega) \text{ fort}$$

(l'injection de $W^{1,1}(\Omega)$ dans $L^1(\Omega)$ étant compacte). Tenant compte de (III.17) on peut affirmer que l'on a nécessairement

$$v_1 - \tilde{v} = \text{cste}.$$

et par suite

$$\bar{v}_{h,1} \to \tilde{v} \quad \text{dans } L^1(\Omega)/\mathbb{R}. \tag{III.18}$$

Comme on a unicité de $\bar{p}^*$ et donc de $\tilde{v}$ dans $L^1(\Omega)/\mathbb{R}$ on en déduit que c'est toute la suite $\bar{v}_{h,1}$ qui vérifie (III.17) et (III.18).

Remarque III.2. Si mes $\Gamma_1 = 0$ on a $\text{Inf}\, \mathcal{Q}_h \leqq \text{cste}$ ce qui implique

$$\int_\Omega |\text{grad}\, \bar{v}_{h,1}|\, dx + \int_\Gamma |\bar{v}_{h,1}|\, d\Gamma \leqq \text{cste};$$

d'où

$$\|\bar{v}_{h,1}\| \leqq \text{cste}$$

et on aboutit aux mêmes résultats.

III.2. Cas d'un ouvert à frontière non polygonale

On considère une triangulation $\mathcal{T}_h$ de Ω telle que la réunion des triangles fermés de $\mathcal{T}_h$ *contienne* $\bar{\Omega}$, vérifiant les conditions *i), ii), iii)* du paragraphe III.1 et vérifiant de plus la condition suivante

v) pour tout K triangle de $\mathcal{T}_h$, $\text{mes}(K \cap \Omega) \neq 0$.

W_h désigne l'ensemble des fonctions affines sur chaque triangle de $\mathcal{T}_h$ et continues sur $\overline{\bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K} = \bar{\Omega}_h$. On pose

$$W_{h,1} = \{v_h \in W_h \mid v_h = 0 \text{ sur les triangles } K \text{ de } \mathcal{T}_h \text{ tels que } K \cap \Gamma_1 = \emptyset\}.$$

Pour tout $u_h \in W_h$ on pose

$$s_h u_h = u_h|_\Omega, \qquad V_h = s_h W_h, \qquad V_{h,1} = s_h W_{h,1}.$$

D'aprés *v)* s_h est bijectif.

Si $v \in \mathscr{C}^2(\bar{\Omega})$, on la prolonge en une fonction de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}^n)$ à support compact et on peut définir

$$v_h = r_h v,$$

où v_h est la fonction de W_h telle que $v_h(N) = v(N)$ pour tout noeud N de la triangulation $\mathcal{T}_h$. Et l'on a le résultat suivant

Lemme III.6. *Pour tout $v \in W^{1,1}(\Omega)$ et tout $h > 0$ il existe $v_h \in W_h$ telle que si $v \in \mathscr{C}^2(\bar{\Omega})$, $v_h = r_h v$ et l'on a*

$$s_h v_h \to v \quad \text{dans } W^{1,1}(\Omega) \text{ quand } h \to 0.$$

Si $v \in V_1$ alors il existe $v_h \in W_{h,1}$ vérifiant les mêmes propriétés.

Donc, si $\Phi \in W^{1,1}(\Omega)$, on peut construire pour tout h, $\Phi_h \in W_h$ telle que

$$s_h \Phi_h \to \Phi \quad \text{dans } W^{1,1}(\Omega).$$

On pose

$$\varphi_h = \Phi_h|_\Gamma.$$

On approxime alors le problème Q par le problème

$$\mathcal{Q}_h \qquad \inf_{v_h \in s_h \Phi_h + V_{h,1}} \left\{ \int_\Omega \sqrt{1 + |\text{grad } v_h|^2}\, dx + \int_{\Gamma_2} |v_h - \varphi_h|\, d\Gamma. \right.$$

On démontre comme en III.1 le

Théorème III.2. *Le problème $\mathcal{Q}_h$ admet une et une seule solution $\bar{v}_{h,1}$ et pour $h \to 0$*

$$\bar{v}_{h,1} \to \tilde{v} \quad \text{dans } L^1(\Omega)/\mathbb{R}$$

$$\frac{\partial \bar{v}_{h,1}}{\partial x_i} \to \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_i} \quad \text{dans } L^1(\sigma), \quad \forall \sigma \subset\subset \Omega, \quad i = 1, 2.$$

Remarque III.3. Dans le cas où l'on approxime directement le problème $\mathscr{P}$, on a $\Gamma_2=\emptyset$ (et $\Gamma_1=\Gamma$) et dans ce cas, on note $\mathscr{P}_h$ le problème $\mathscr{Q}_h$.

On pose

$$\mathscr{T}_{h,0}=\{K\in\mathscr{T}_h \mid K\subset\Omega \text{ et } K\cap\Gamma_1=\emptyset\}$$

et

$$\Omega_{h,0}=\bigcup_{K\in\mathscr{T}_{h,0}} K.$$

Constantons que si $v_h\in W_{h,1}$, alors v_h est nulle hors de $\Omega_{h,0}$ et par suite, si $v_h\in\Phi_h+W_{h,1}$,

$$\int_\Omega \sqrt{1+|\operatorname{grad} v_h|^2}\,dx=\int_{\Omega_{h,0}} \sqrt{1+|\operatorname{grad} v_h|^2}\,dx+\int_{\Omega-\Omega_{h,0}} \sqrt{1+|\operatorname{grad}\Phi_h|^2}.$$

On en déduit donc

$$\operatorname{Inf}\mathscr{P}_h=\operatorname{Inf}\tilde{\mathscr{P}}_h+\int_{\Omega-\Omega_{h,0}} \sqrt{1+|\operatorname{grad}\Phi_h|^2}\,dx,$$

où

$$\operatorname{Inf}\tilde{\mathscr{P}}_h=\operatorname*{Inf}_{v_h\in s_h\Phi_h+V_{h,0}} \int_{\Omega_{h,0}} \sqrt{1+|\operatorname{grad}\Phi_h|^2}\,dx,$$

où $V_{h,0}$ est l'ensemble des fonctions affines sur chaque triangle K de $\mathscr{T}_{h,0}$, continues sur $\bar{\Omega}_{h,0}$ et nulles au bord.

Donc, dans ce cas, seule la triangulation $\mathscr{T}_{h,0}$ est utilisée pour la détermination de la solution de $\mathscr{P}_h$.

IV. Résolution numérique des problèmes $\mathscr{Q}_h$

Dans cette section nous allons considérer la résolution numérique des problèmes $\mathscr{Q}_h$ obtenus dans le numéro précédent.

Si l'on considère le problème $\mathscr{P}_h$ (rappelons que c'est le problème $\mathscr{Q}_h$ avec $\Gamma_2=\emptyset$), la fonctionnelle obtenue est différentiable et l'on va utiliser une méthode de relaxation. Par contre, si $\Gamma_2\neq\emptyset$, la fonctionnelle n'étant plus différentiable, nous allons transformer notre problème en un problème de recherche de point selle afin d'appliquer un algorithme de type UZAWA. Dans ce cas on ne montrera la convergence de la méthode que si mes $\Gamma_1\neq 0$. On a cependant effectué des essais numériques avec $\Gamma_1=\emptyset$ et l'on a constaté que, pour certains exemples, le procédé convergeait (cf. V).

IV.1. Résolution du problème $\mathscr{P}_h$

D'après la Remarque III.3 on peut supposer Ω à frontière polygonale ($\Omega_{h,0}$ étant ouvert à frontière polygonale). Si $\mathscr{T}_h$ désigne la triangulation de Ω, on note

T_k, $k=1,\dots,T$, les triangles de $\mathscr{T}_h$,
N_i, $i=1,\dots,N$, les noeuds de $\mathscr{T}_h$,

et on supposera que

N_i, $i=1,\dots,M$, $M<N$ sont les noeuds intérieurs.

V_h a été défini en III.1 et

$$V_{h,0}=\{v_h\in V_h \mid v_h|_\Gamma=0\}.$$

Pour tout $v_h\in V_h$ on lui associe

$$\gamma=(v_1, v_2, \ldots, v_N)\in\mathbb{R}^N,$$

où $v_i=v_h(N_i)$, $i=1, \ldots, N$, et réciproquement.

On suppose Φ_h donnée dans V_h; en fait il suffit de supposer $\Phi_h|_\Gamma$ donnée, car

$$v_h\in\Phi_h+V_{h,0}\Leftrightarrow\begin{cases}v_i=\Phi_i, & i=M+1, \ldots, N,\\ v_i\in\mathbb{R}, & i=1, \ldots, M.\end{cases}$$

Donc à tout $v_h\in\Phi_h+V_{h,0}$, on peut associer

$$\gamma_0=(v_1, v_2, \ldots, v_M)\in\mathbb{R}^M$$

et réciproquement.

Le problème

$\mathscr{P}_h$
$$\operatorname*{Inf}_{v_h\in\Phi_h+V_{h,0}}\int_\Omega\sqrt{1+|\operatorname{grad} v_h|^2}\,dx\,dy$$

s'écrit

(IV.1)
$$\operatorname*{Inf}_{\gamma_0\in\mathbb{R}^m} J(\gamma_0)$$

où l'on a posé

$$J(\gamma_0)=\int_\Omega\sqrt{1+|\operatorname{grad} v_h|^2}\,dx\,dy.$$

Si $v_h\in V_h$, on a

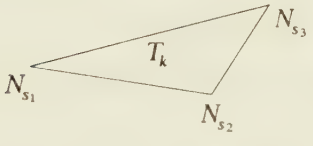
$$v_h|_{T_k}=\frac{(\beta_{1,k}+\beta_{2,k}x+\beta_{3,k}y)}{a_k},$$

où

$$\beta_{2,k}=(y_{s_2}-y_{s_3})v_{s_1}+(y_{s_3}-y_{s_1})v_{s_2}+(y_{s_1}-y_{s_2})v_{s_3},$$
$$\beta_{3,k}=(x_{s_2}-x_{s_3})v_{s_1}+(x_{s_3}-x_{s_1})v_{s_2}+(x_{s_1}-x_{s_2})v_{s_3},$$

et

$$a_k=\det\begin{pmatrix}x_{s_1} & x_{s_2} & x_{s_3}\\ y_{s_1} & y_{s_2} & y_{s_3}\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$



On en déduit que

$$|\operatorname{grad} v_h|^2|_{T_k}=\frac{\beta_{2,k}^2+\beta_{3,k}^2}{a_k^2},$$

de sorte que $|\operatorname{grad} v_h|$ est constant sur chaque triangle T_k. Comme l'aire du triangle T_k vaut $\frac{|a_k|}{2}$ on a

$$J(\gamma_0)=\tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{T}(a_k^2+\beta_{2,k}^2+\beta_{3,k}^2)^{1/2}.$$

D'après les résultats du paragraphe précédent on peut affirmer que le problème (IV.1) possède une et une seule solution. Pour en déterminer une valeur approchée on va utiliser la méthode de relaxation suivante:

On se donne $\hat{\gamma}_0^{(0)}$ et on calcule $\hat{\gamma}_0^{(1)}, \ldots$, plus généralement connaissant $\hat{\gamma}_0^{(m)}$, on calcule $\hat{\gamma}_0^{(m+1)}$ en déterminant successivement pour $i=1, \ldots, M$, la fonction $v_i^{(m+1)}$ par

$$v_i^{(m+1)} = v_i^{(m)} - \omega \frac{\dfrac{\partial J}{\partial v_i}({}_i\hat{\gamma}_0^{(m)})}{\dfrac{\partial^2 J}{\partial v_i^2}({}_i\hat{\gamma}_0^{(m)})}, \tag{IV.3}$$

où

$$\hat{\gamma}_0^{(m)} = (v_1^{(m+1)}, v_2^{(m+1)}, \ldots, v_{i-1}^{(m+1)}, v_i^{(m)}, \ldots, v_M^{(m)}).$$

Si l'on montre que J vérifie:

(IV.4) J est deux fois continument différentiable sur $\mathbb{R}^M$,

(IV.5) la matrice hessienne de J est définie positive,

(IV.6) $J(\hat{\gamma}_0) \geqq c \ \forall \hat{\gamma}_0 \in \mathbb{R}^M$ où c est une constante,

et

(IV.7) $\{\hat{\gamma}_0 \in \mathbb{R}^M \mid J(\hat{\gamma}_0) \leqq J(\hat{\gamma}_0^{(0)})\}$ est borné dans $\mathbb{R}^M$,

alors d'après S. SCHECHTER [13] on peut affirmer qu'il existe a et b, $0<a<b<2$, tels que pour $\omega \in [a, b]$

$$\hat{\gamma}_0^{(m)} \to \hat{\gamma}_0^{-} \quad \text{solution de (IV.1).}$$

J vérifie (IV.6) avec, par exemple, $c=0$. On sait que

$$J(\hat{\gamma}_0) \to +\infty \quad \text{quand } \|\hat{\gamma}_0\| \to +\infty$$

ce qui démontre (IV.7).

Pour montrer (IV.4) et (IV.5) on considère

$$f(\xi) = G_1(\Lambda_1(u_h + \xi v_h)), \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad u_h \text{ et } v_h \in V_h. \tag{IV.8}$$

Constatons que f est deux fois continument différentiable en 0, ce qui démontre (IV.4) et que

$$f''(0) = \int_\Omega \frac{|\operatorname{grad} v_h|^2 + |\operatorname{grad} u_h|^2 |\operatorname{grad} v_h|^2 - (\operatorname{grad} u_h \cdot \operatorname{grad} v_h)^2}{(1+|\operatorname{grad} u_h|^2)^{3/2}} \, dx\, dy,$$

De cette expression on en déduit que

$$f''(0) \geqq \int_\Omega \frac{|\operatorname{grad} v_h|^2}{(1+|\operatorname{grad} u_h|^2)^{3/2}} \, dx\, dy. \tag{IV.9}$$

Si $v_h \in \Phi_h + V_{h,0}$, alors $|\operatorname{grad} v_h| \neq 0$ et donc $f''(0)>0$, en sorte que J vérifie (IV.5).

IV.2. Résolution du problème $\mathscr{Q}_h$

On va transformer notre problème

$$\mathscr{Q}_h \qquad \inf_{v_h\in\Phi_h+V_{h,1}} \int_\Omega \sqrt{1+|\operatorname{grad} v_h|^2}\,dx\,dy+\int_{\Gamma_2}|v_h-\varphi_h|\,d\Gamma$$

en un problème de point-selle. Pour cela on pose

$$\mathscr{T}_{h,\Gamma_2}=\{K\in\mathscr{T}_h \mid K\cap\Gamma_2\neq\emptyset\},$$

$$L_h=\{\ell_h\in L^2(\Gamma_2)\mid \ell_h|_{K\cap\Gamma_2}=\text{cste},\ K\in\mathscr{T}_{h,\Gamma_2}\},$$

$$\mathscr{B}_h=\{\ell_h\in L_h\mid |\ell_h(x,y)|\leqq 1\},$$

et

$$J_1(v_h)=G_1(A_1(v_h))=\int_\Omega \sqrt{1+|\operatorname{grad} v_h|^2}\,dx\,dy,\qquad \forall\, v_h\in V_h.$$

Notons que J_1 est deux fois continument différentiable sur V_h et que

$$\text{(IV.10)}\qquad \langle J_1''(u_h)\cdot v_h, v_h\rangle=f''(0)\geqq\int_\Omega\frac{|\operatorname{grad} v_h|^2}{(1+|\operatorname{grad} u_h|^2)^{3/2}}\,dx\,dy$$

(cf. (IV.8) et (IV.9)).

Pour tout $w_h\in V_h$, $B(w_h)$ désigne la fonction de L_h définie par

$$\text{(IV.11)}\qquad B(w_h)|_{K\cap\Gamma_2}=\frac{1}{\operatorname{long}(K\cap\Gamma_2)}\int_{\Gamma_2\cap K} w_h\,d\Gamma,\qquad \forall\, K\in\mathscr{T}_{h,\Gamma_2}.$$

On pose

$$\text{(IV.12)}\qquad \mathscr{L}_h(v_h,\ell_h)=J_1(v_h)+((\ell_h, B(v_h-\varphi_h)))_{L^2(\Gamma_2)}.$$

On sait que, si $\varphi\in L^\infty(\Gamma)$, alors la solution généralisée $\tilde v$ de $\mathscr{P}$ est dans $L^\infty(\Omega)$; par conséquent on peut se contenter de chercher $\bar v_{h,1}$, solution de $\mathscr{Q}_h$, dans un borné de $L^\infty(\Omega)$

$$\|v_h\|_{L^\infty(\Omega)}\leqq c$$

Comme $\operatorname{mes}(\Gamma_1)\neq 0$, on peut chercher $\bar v_{h,1}$ dans le convexe fermé borné

$$\mathscr{A}_h=\{\Phi_h+V_{h,1}\}\cap\{v_h\mid\|\operatorname{grad} v_h\|_{L^\infty(\Omega)}\leqq c_1(h)\}.$$

$\mathscr{A}_h$ (resp $\mathscr{B}_h$) est un compact de $V_{h,1}$ (resp L_h) et $\mathscr{L}_h(.,.)$ est convexe concave et continue sur $V_{h,1}\times L_h$, par conséquent $\mathscr{L}_h(v_h,\ell_h)$ admet un point selle sur $\mathscr{A}_h\times\mathscr{B}_h$; c'est à dire, il existe $(\bar v_h,\bar\ell_h)\in\mathscr{A}_h\times\mathscr{B}_h$ tel que

$$\text{(IV.13)}\qquad \mathscr{L}_h(\bar v_h,\ell_h)\leqq\mathscr{L}_h(\bar v_h,\bar\ell_h),\qquad \forall\,\ell_h\in\mathscr{B}_h$$

et

$$\text{(IV.14)}\qquad \mathscr{L}_h(\bar v_h,\bar\ell_h)\leqq\mathscr{L}_h(v_h,\bar\ell_h),\qquad \forall\, v_h\in\mathscr{A}_h.$$

La première composante $\bar v_h$ est déterminée de manière unique puisque J_1 est strictement convexe sur $\mathscr{A}_h$.

Remarquons que, si $\bar v_h-\varphi_h$ garde un signe constant sur les arcs $K\cap\Gamma_2$, $K\in\mathscr{T}_{h,\Gamma_2}$, alors $\bar v_h$ est la solution de $\mathscr{Q}_h$. En effet, si dans (IV.13) on prend

$$\ell_h=\operatorname{signe}(\bar v_h-\varphi_h)\,1,$$

on obtient

$$G_1(\Lambda_1 \bar{v}_h) + G_{2,\Phi_h}(\gamma_0 \bar{v}_h) \leqq \mathscr{L}_h(\bar{v}_h, \bar{\ell}_h).$$

D'après (IV.14),

$$\mathscr{L}_h(\bar{v}_h, \bar{\ell}_h) \leqq J_1(v_h) + \int_{\Gamma_2} \bar{\ell}_h (v_h - \varphi_h)\, d\Gamma$$

$$\leqq G_1(\Lambda_1 v_h) + G_{2,\Phi_h}(\gamma_0 V_h), \qquad \forall\, v_h \in \mathscr{A}_h,$$

d'où

$$G_{\Phi_h}(\Lambda \bar{v}_h) \leqq G_{\Phi_h}(\Lambda v_h), \qquad \forall\, v_h \in \mathscr{A}_h.$$

Cela signifie que $\bar{v}_h$ est solution de $\mathscr{P}_h$.

Dans ce cas on a également

$$\int_{\Gamma_2} |\bar{v}_h - \varphi_h|\, d\Gamma \leqq \int_{\Gamma_2} \bar{\ell}_h (\bar{v}_h - \varphi_h)\, d\Gamma;$$

donc

$$\bar{\ell}_h = \operatorname{signe}(\bar{v}_h - \varphi_h) 1$$

sur les arcs $K \cap \Gamma_2$ où $\bar{v}_h$ est différent de φ_h.

Pour déterminer $\bar{v}_h$, on considère un algorithme de type UZAWA (cf. [1]): On part de $\ell_h^{(0)} \in \mathscr{B}_h$, on calcule $v_h^{(1)}, \ell_h^{(1)}, \ldots$; $\ell_h^{(n)}$ étant connu, on détermine

(IV.15) $v_h^{(n+1)}$ comme l'élément de $\mathscr{A}_h$ qui minimise $J_1(v_h) + \big((\ell_h^{(n)}, B(v_h - \varphi_h))\big)_{L^2(\Gamma_2)}$;

on définit ensuite

$$\ell_h^{(n+1)} = H_{\mathscr{B}_h}\big(\ell_h^{(n)} + \rho B(v_h^{(n+1)} - \varphi_h)\big) \tag{IV.16}$$

où $H_{\mathscr{B}_h}$ est la projection sur $\mathscr{B}_h$.

Proposition IV.1. *Il existe $c_4(h)$ tel que, si $0 < \rho < c_4(h)$, alors v_h^{n+1} converge vers $\bar{v}_h$ quand n tend vers l'infini.*

Démonstration. On obtient en remplaçant dans (IV.13) $\mathscr{L}_h$ par son expression (IV.12)

$$\big((\ell_h - \bar{\ell}_h, B(\bar{v}_h - \varphi_h))\big)_{L^2(\Gamma_2)} \leqq 0, \qquad \forall\, \ell_h \in \mathscr{B}_h;$$

donc

$$\bar{\ell}_h = H_{\mathscr{B}_h}\big(\bar{\ell}_h + \rho B(\bar{v}_h - \varphi_h)\big), \qquad \forall\, \rho > 0.$$

La projection étant contractante, on a

$$\|\bar{\ell}_h - \ell_h^{(n+1)}\|_{L^2(\Gamma_2)} \leqq \|\bar{\ell}_h - \ell_h^{(n)} + \rho B(\bar{v}_h - v_h^{(n+1)})\|_{L^2(\Gamma_2)},$$

d'où

$$\|\bar{\ell}_h - \ell_h^{(n+1)}\|^2_{L^2(\Gamma_2)} \leqq \|\bar{\ell}_h - \ell_h^{(n)}\|^2_{L^2(\Gamma_2)} + \rho^2 c_2^2(h) \|\bar{v}_h - v_h^{(n+1)}\| + 2\rho\big((B(\bar{v}_h - v_h^{(n+1)}), \bar{\ell}_h - \ell_h^{(n)})\big)_{L^2(\Gamma_2)} \tag{IV.17}$$

(comme $B \in \mathscr{L}(V_h, L_h)$, on a $\|B(w_h)\|_{L^2(\Gamma_2)} \leqq c_2(h) \|w_h\|$).

D'autre part, (IV.14) signifie que

(IV.18) $\bar{v}_h$ minimise $J_1(v_h) + \big((\bar{\ell}_h, B(v_h - \varphi_h))\big)_{L^2(\Gamma_2)}$ sur $\mathscr{A}_h$;

donc $\bar{v}_h$ peut être caractérisé par

$$\langle J_1'(\bar{v}_h), v_h - \bar{v}_h \rangle + \big((\bar{\ell}_h, B(v_h - \bar{v}_h))\big)_{L^2(\Gamma_2)} \geqq 0, \qquad \forall\, v_h \in \mathscr{B}_h. \tag{IV.19}$$

De même, d'après (IV.15), $v_h^{(n+1)}$ est caractérisé par

(IV.20) $\langle J_1'(v_h^{(n+1)}), v_h - v_h^{(n+1)}\rangle + \big((\ell_h^{(n)}, B(v_h - v_h^{(n+1)}))\big)_{L^2(\Gamma_2)} \geqq 0, \quad \forall\, v_h \in \mathscr{B}_h.$

On fait $v_h = v_h^{(n+1)}$ dans (IV.19) et $v_h = \bar{v}_h$ dans (IV.20); on obtient par addition

(IV.21) $\langle J_1'(\bar{v}_h) - J_1'(v_h^{(n+1)}), v_h^{(n+1)} - \bar{v}_h\rangle + \big((\bar{\ell}_h - \ell_h^{(n)}, B(v_h^{(n+1)} - \bar{v}_h))\big)_{L^2(\Gamma_2)} \geqq 0.$

Or il existe $\theta \in [0, 1[$ tel que

$$\langle J_1'(\bar{v}_h) - J_1'(v_h^{(n+1)}), v_h^{(n+1)} - \bar{v}_h\rangle = -\langle J_1''(w_h)\cdot(\bar{v}_h - v_h^{(n+1)}), \bar{v}_h - v_h^{(n+1)}\rangle,$$

où $w_h = \theta \bar{v}_h + (1-\theta) v_h^{(n+1)}$. D'après (IV.10)

$$\begin{aligned}\langle J_1'(\bar{v}_h) - J_1'(v_h^{(n+1)}), v_h^{(n+1)} - \bar{v}_h\rangle &\leqq -\int_\Omega \frac{|\operatorname{grad}(v_h^{(n+1)} - \bar{v}_h)|^2}{(1+|\operatorname{grad} w_h|^2)^{3/2}}\, dx\, dy \\ &\leqq -c_3(h)\|v_h^{(n+1)} - \bar{v}_h\|^2.\end{aligned}$$

Donc (IV.21) implique

$$\big((\bar{\ell}_h - \ell_h^{(n)}, B(\bar{v}_h - v_h^{(n+1)}))\big)_{L^2(\Gamma_2)} \leqq -c_3(h)\|v_h^{(n+1)} - \bar{v}_h\|^2.$$

Si l'on reporte cette inégalité dans (IV.17), on obtient

(IV.22) $\|\bar{\ell}_h - \ell_h^{(n+1)}\|^2_{L^2(\Gamma_2)} + \big(\rho c_3(h) - \rho^2 c_2^2(h)\big)\|\bar{v}_h - v_h^{(n+1)}\|^2 \leqq \|\bar{\ell}_h - \ell_h^{(n)}\|^2_{L^2(\Gamma_2)}$

et si $0 < \rho < \dfrac{c_3(h)}{c_2^2(h)} = c_4(h)$, alors

$$\|\bar{\ell}_h - \ell_h^{(n+1)}\|^2_{L^2(\Gamma_2)} < \|\bar{\ell}_h - \ell_h^{(n)}\|^2_{L^2(\Gamma_2)}.$$

De cette inégalité stricte on déduit que la suite $(\|\bar{\ell}_h - \ell_h^{(n)}\|_{L^2(\Gamma_2)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite et donc, d'après (IV.22), $\|\bar{v}_h - v_h^{(n)}\|^2 \to 0$ quand $n \to \infty$.

Remarque IV.1. Pour résoudre (IV.15) on utilise la méthode de relaxation. Comme une valeur très approchée de $v_h^{(n+1)}$ suffit, on ne fait qu'une seule étape dans cette méthode, en prenant comme vecteur initial $v_h^{(n)}$. Donc il faudra au départ se donner, en plus de $\ell_h^{(0)}$, $v_h^{(0)}$.

Remarque IV.2. Dans cette méthode la rapidité de convergence de la méthode dépend du choix de deux paramètres: ρ intervenant dans (IV.16) et ω intervenant dans la méthode de relaxation pour résoudre (IV.15).

V. Essais numériques

Nous allons dans cette partie indiquer les résultats numériques obtenus par les méthodes précédemment décrites pour des exemples classiques.

V.1. Exemple 1

On considère et la'fonction Φ est comme domaine Ω le carré $]0, 1[\times]0, 1[$

$$\Phi(x, y) = \cosh^2 y - x^2.$$

Le problème $\mathscr{P}$ admet dans ce cas une solution

$$\bar{v}(x, y) = \Phi(x, y).$$

Cet exemple a été traité par P. Concus [2] à l'aide des différences finies.

On considère la triangulation de figure 1: $(k=1/p,\ p\in N)$

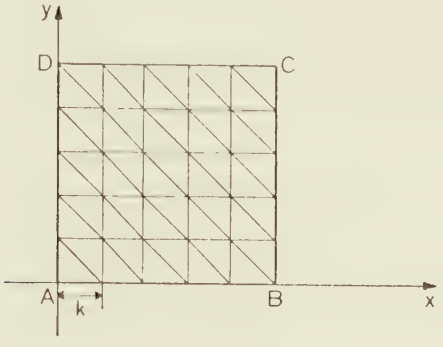


Figure 1

On a résolu $\mathscr{P}_h$ par la méthode de relaxation décrite en IV.1 et on a pris pour test de sortie de cette méthode

$$\frac{\|\gamma_0^{(m+1)}-\gamma_0^{m}\|_2}{\|\gamma_0^{(m+1)}\|_2}\leqq\varepsilon \quad (\varepsilon \text{ à préciser}),$$

où

$$\|\gamma_0\|_2=\left(\sum_{i=1}^{M} v_i^2\right)^{1/2} \qquad (M=(p-1)^2).$$

Pour $p=10$, $\varepsilon=10^{-5}$ et $\omega=1{,}6$ (ω est le paramètre qui figure en (IV.3)) on a effectué 27 itérations et on a obtenu un résultat tel que

$$\text{err}=\frac{\|\gamma_0^{(27)}-\overline{\gamma_0}\|_2}{\|\overline{\gamma_0}\|_2}=5{,}3\cdot 10^{-4}.$$

Pour $p=20$, $\varepsilon=10^{-6}$ et $\omega=1{,}7$ on a effectué 58 itérations pour obtenir un résultat tel que

$$\text{err}=\frac{\|\gamma_0^{(58)}-\overline{\gamma_0}\|_2}{\|\overline{\gamma_0}\|_2}=1{,}97\cdot 10^{-4},$$

où $\overline{\gamma_0}$ est le vecteur de $\mathbb{R}^M$ dont les composantes sont les valeurs de $\bar{v}$ aux noeuds intérieurs de la triangulation.

Dans [2] CONCUS avait obtenu avec un pavage régulier de coté 1/40 au bout de 162 itérations une erreur relative discrète de $1{,}63\cdot 10^{-4}$. Donc on a obtenu avec un reseau moins fin des résultats sensiblement identiques.

V.2. Exemple 2

On a ensuite effectué des essais sur des exemples où le problème $\mathscr{P}$ n'a pas toujours de solution mais une solution généralisée. On considère

$$\Omega=\{(x,y)\,|\,1<(x^2+y^2)^{1/2}<R\}$$

et

$$\Phi(x, y)=f(\theta)\cdot\frac{R-r}{R-1}$$

où r et θ sont les coordonnées polaires et $f(\theta)$ une fonction donnée.

On a pris, pour les essais, $R=4$, $f(\theta)=$cste., ou $f(\theta)=2+\sin\theta$. Si $f(\theta)=c$ et si $c\leqq c_0=\operatorname{Arg ch} R$ (dans le cas $R=4$ on a $c_0\approx 2{,}063$), il est bien connu que $\mathscr{P}$ admet une solution

$$\bar{v}_c(r)=\alpha\operatorname{Log}(R+\sqrt{R^2-\alpha^2})-\alpha\operatorname{Log}(r+\sqrt{r^2-\alpha^2}),$$

α étant déterminé par $\bar{v}_c(1)=c$. Par contre si $c>c_0$, $\mathscr{P}$ n'a pas de solution regulare. La solution généralisée, d'après la Remarque II.5, est

$$\bar{v}_{c_0}(r)\quad\text{pour}\quad 1\leqq r\leqq R$$

Ces exemples ont été étudiés dans [16] par la même méthode que celle décrite en IV.1.

Par raison de symétrie, il suffit de considérer seulement la demi-couronne située dans le demi-plan des x positifs, en imposant, sur les bords situés sur l'axe des y, une condition de NEUMANN.

On a triangulé le domaine comme dans [16], c'est à dire qu'on partage la demicouronne en n secteurs réguliers et les noeuds de la triangulation sont les intersections entre les rayons délimitant ces secteurs et les cercles C_{rj} centrés à l'origine et de rayon r_j, $j=1,\ldots,p+1$, où

$$r_1=1,\qquad r_{j+1}=r_j\exp\left(\frac{\log R}{p}\right).$$

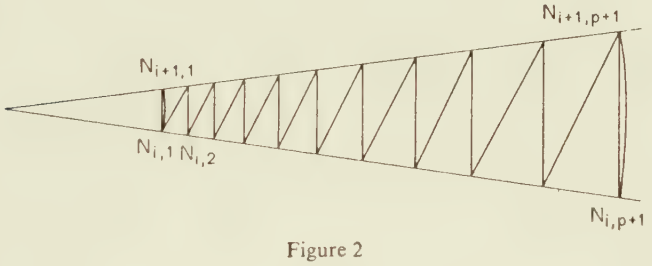


Figure 2

Les noeuds sont numérotés $N_{i,j}$, $i=1,\ldots,n+1$, $j=1,\ldots,p+1$. On notera

- $\mathscr{V}$ le vecteur de $\mathbb{R}^N$ de composantes $v_h(N_{i,j})$ $1\leqq i\leqq n+1$, $1\leqq j\leqq p+1$,
- $\mathscr{V}_1$ le vecteur de $\mathbb{R}^{N_1}$ de composantes $v_h(N_{i,j})$ $1\leqq i\leqq n+1$, $1\leqq j\leqq p$,
- $\mathscr{V}_0$ le vecteur de $\mathbb{R}^M$ de composantes $v_h(N_{i,j})$ $1\leqq i\leqq n+1$, $2\leqq j\leqq p$,
- $\mathscr{\ell}$ le vecteur de $\mathbb{R}^{2n}$ dont les composantes sont les valeurs de ℓ_h sur les cotés $N_{i,1}N_{i+1,1}$ et $N_{i,p+1}N_{i+1,p+1}$, $1\leqq i\leqq n$,
- $\mathscr{\ell}_1$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont les composantes sont les valeurs de ℓ_h sur les cotés $N_{i,1}N_{i+1,1}$ $1\leqq i\leqq n$.

Dans tous les essais qui vont suivre, on choisira pour vecteur initial de la méthode de relaxation ou de la méthode d'UZAWA le vecteur obtenu en interpolant sur chaque rayon les conditions aux bords.

V.2.1. $f(0)=c=3.$

Comme $c>c_0$ la solution généralisée est $\bar{v}_{c_0}(r)$. On a pris $p=10$, $n=12$ et $\varepsilon=10^{-2}$ dans les trois essais qui vont suivre.

1er essai. Méthode IV.1. On considère comme test de sortie dans cette méthode

$$\|\gamma_0^{(m+1)}-\gamma_0^{(m)}\|_1 \leqq \varepsilon$$

$$\left(\text{si } x\in\mathbb{R}^n,\ \|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|\right)$$

Pour $\omega=1{,}6$ on a effectué 45 itérations.

2ème essai. Méthode IV.2 avec $(\Gamma_1,\Gamma_2)=(C_R,C_1)$. On a pris pour test de sortie de l'algorithme d'UZAWA.

$$\|\gamma_1^{(m+1)}-\gamma_1^{(m)}\|_1+\|\ell_1^{(m+1)}-\ell_1^{(m)}\|_1 \leqq \varepsilon$$

et on a pris $\ell_1^{(0)}=-(1,1,\ldots,1)$. Pour $\omega=1{,}6$ et $\rho=0{,}5$ on set sorti au bout de 53 itérations.

3ème essai. Méthode IV.2 avec $(\Gamma_1,\Gamma_2)=(\emptyset,\Gamma)$. Dans ce cas le test de sortie était:

$$\|\gamma^{(m+1)}-\gamma^{(m)}\|_1+\|\ell^{(m+1)}-\ell^{(m)}\|_1 \leqq \varepsilon$$

et on a pris comme composantes de $\ell^{(0)}$: -1 sur C_1 et 0 sur C_R. Pour $\omega=1{,}6$ et $\rho=0{,}5$ on a constaté que l'algorithme divergeait et pour $\omega=1{,}2$ et $\rho=0{,}5$ il a fallu effectuer 138 itérations avant que le test ne soit réalisé. Dans ce cas on a obtenu $0\,(\pm 10^{-4})$ aux noeuds de la triangulation situés sur le cercle C_R.

Les résultats obtenus aux noeuds de la triangulation suivant l'un des rayons pour ces 3 essais sont indiqués dans le tableau 1 et la figure 3.

Tableau 1

r_i	Valeur exacte	Méthode IV.1	Méthode IV.2 $(\Gamma_1,\Gamma_2)=(C_R,C_1)$	Méthode IV.2 $(\Gamma_1,\Gamma_2)=(\emptyset,\Gamma)$
1.	2.063	3.	1.879	1.880
1.149	1.525	1.686	1.503	1.505
1.319	1.284	1.394	1.269	1.270
1.516	1.087	1.171	1.075	1.077
1.741	0.911	0.976	0.901	0.902
2.000	0.746	0.798	0.739	0.740
2.297	0.590	0.629	0.584	0.584
2.639	0.438	0.466	0.433	0.434
3.031	0.290	0.308	0.287	0.287
3.482	0.144	0.153	0.143	0.143
4.00	0.	0.	0.0	0.0
Représentation sur figure 3.	trait continu	+	×	

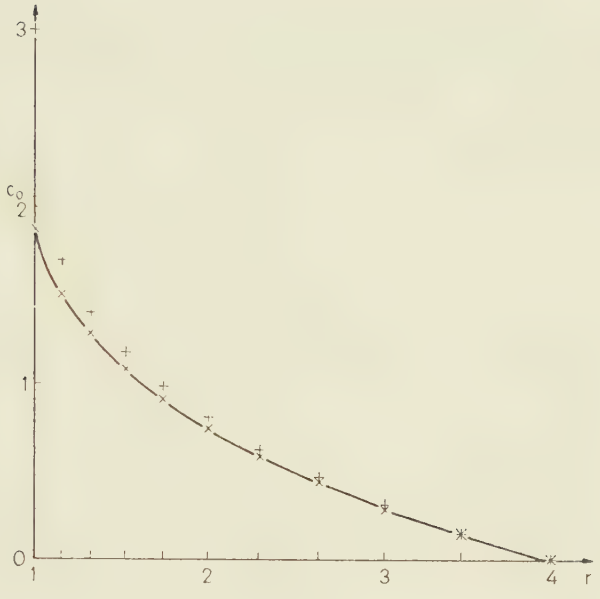


Figure 3

Remarques. Comme on peut le constater sur le tableau 1, les résultats obtenus en approximant le problème $\mathscr{P}$ sont nettement moins bons que ceux obtenus en approximant un problème $\mathscr{Q}$ avec $\Gamma_2 \neq \emptyset$.

Les deux derniers résultats sont identiques car le problème $\mathscr{Q}$ avec $(\Gamma_1, \Gamma_2) = (\emptyset, C_1 \cup C_R)$ et le problème $\mathscr{Q}$ avec $(\Gamma_1, \Gamma_2) = (C_R, C_1)$ admettent, la même solution $\bar{v}_{c_0}(r)$, solution généralisée de $\mathscr{P}$.

Le choix (C_R, C_1) pour (Γ_1, Γ_2) est le meilleur choix possible dans ce cas.

V.2.2. $f(\theta) = 2 + \sin\theta$

On a effectué les mêmes essais que dans le cas précédent, avec les mêmes valeurs pour p, n et ε

1^er^ essai. Méthode IV.1. Pour $\omega = 1{,}6$ on a effectué 33 itérations.

2^ème^ essai. Méthode IV.2 avec $(\Gamma_1, \Gamma_2) = (C_R, C_1)$. Pour $\omega = 1{,}6$ et $\rho = 2$ on a effectué 38 itérations.

3^ème^ essai. Méthode IV.2 avec $(\Gamma_1, \Gamma_2) = (\emptyset, \Gamma)$. Pour $\omega = 1{,}2$ et $\rho = 1$ on a effectué 104 itérations. On a obtenu $0\ (\pm 4 \cdot 10^{-4})$ sur le cercle C_R.

Dans les deux derniers essais on a constaté que la solution généralisée ne vérifiait plus la condition aux limites $v = \varphi$ sur une partie de C_1. Afin de connaitre un peu mieux le comportement de la solution généralisée sur le bord C_1, on a effectué un essai avec une triangulation un peu plus fine.

4^ème^ essai. Méthode IV.2 avec $(\Gamma_1, \Gamma_2) = (C_R, C_1)$. On a pris $p = 20$, $n = 24$, $\varepsilon = 10^{-2}$, $\omega = 1{,}7$ et $\rho = 2$ et l'on est sorti au bout de 118 iterations. La figure 4

indique les valeurs obtenues aux noeuds de la triangulation situés sur C_1 (représentés par X), le trait continu représente la fonction φ sur C_1.

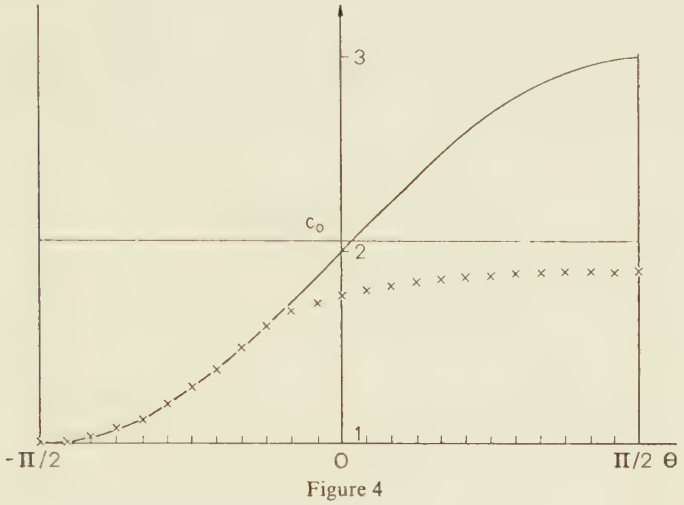


Figure 4

Constatons que pour $f(\theta)=(2+\sin\theta)$ la surface généralisée semble décollée du contour imposé avant que la fonction φ n'atteigne la constante critique c_0.

V.3. Exemple 3

Soit ABD un triangle équilatéral, C son centre de gravité (pour les essais numériques on a pris la longueur de AB égale à 1). Ω est le quadrilatère non convexe $ABCD$, on définit φ de la façon suivante:

φ est continue sur Γ,
$\varphi=0$ sur AB et AD, $\varphi(C)=c$
φ est affine sur CB et CD

Le contour $\mathscr{C}$ sur lequel doit s'appuyer la surface est donc le quadrilatère gauche ABE_cD où E_c a pour coordonnées $(0, 0, c)$.

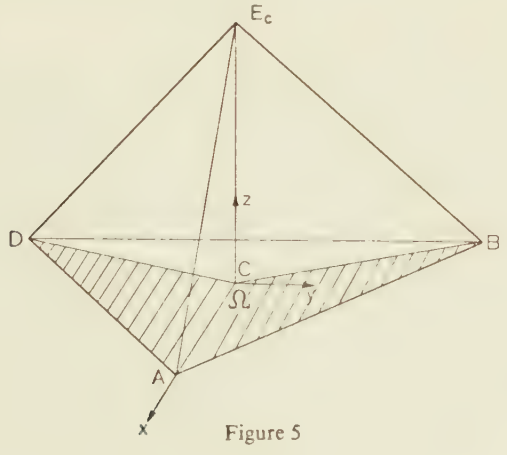


Figure 5

Quelle que soit la valeur de c (sauf $c=0$) $\mathscr{P}$ n'admet pas de solution (cf. [9] et [10]) mais par contre on a comme toujours existence d'une solution généralisée.

Par raison de symétrie on peut se limiter au triangle ABC en imposant une condition de NEUMANN sur AC. Sur ce triangle on a considère la triangulation indiquée par la figure 6 ($h=1/p$, $p\in\mathbb{N}$). On a tout d'abord essayé de résoudre $\mathscr{Q}_h$ avec $(\Gamma_1,\Gamma_2)=(\emptyset,\Gamma)$ mais on n'a pas trouvé de valeurs pour les paramètres ρ et ω assurant la convergence de l'algorithme; c'est pourquoi, on a prise $(\Gamma_1,\Gamma_2)=(DA\cup AB,\ BC\cup CD)$.

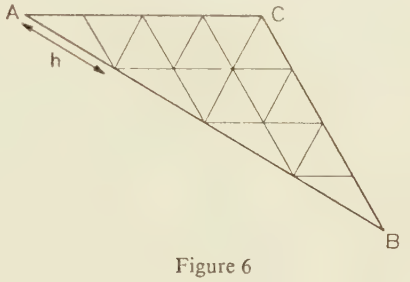


Figure 6

On a pris pour test de sortie

$$\frac{\|\mathscr{V}_1^{(m+1)}-\mathscr{V}_1^{(m)}\|_1}{c}+\|\ell_1^{(m+1)}-\ell_1^{(m)}\|_1\leqq\varepsilon,$$

où $\mathscr{V}_1$ est le vecteur de $\mathbb{R}^N\left(N=\dfrac{p(p+1)}{2}\right)$ dont les composantes sont les valeurs de v_h aux noeuds intérieurs au triangle et aux noeuds situés sur AC et CB et ℓ_1 est le vecteur de $\mathbb{R}^p$ dont les composantes sont les valeurs de ℓ_h sur les cotés des triangles situés sur BC.

On a pris $\mathscr{V}_1^{(0)}=(0,0,\ldots,0)$, $\ell_1^{(0)}=-(1,1,\ldots,1)$, $p=20$ et $\varepsilon=10^{-3}$. Pour $c=0{,}3$ $\omega=1{,}8$ et $\rho=4$ on est sorti de l'algorithme au bout de 73 itérations. Pour $c=1$ $\omega=1{,}8$ et $\rho=4$ on a effectué 40 itérations avant que le test ne soit réalisé. Les figures 7 et 8 indiquent les valeurs de $\bar{v}_{h,1}$, obtenues aux noeuds de la triangulation situés sur BC (marquées d'un signe +).

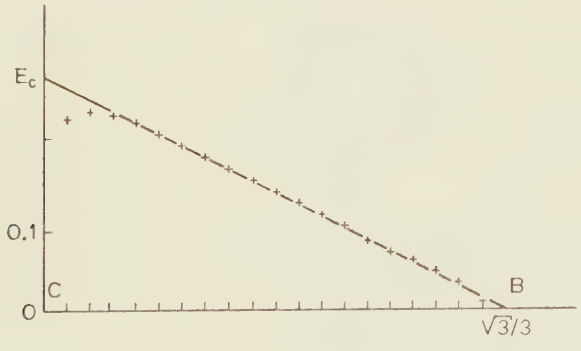


Figure 7. $c=0,3$

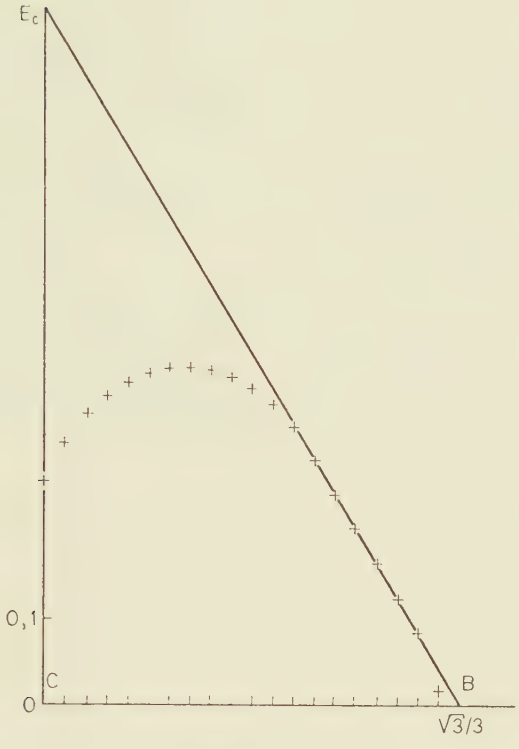


Figure 8. $c=1$

Remarque. Le nombre d'itérations est plus élevé pour $c=0{,}3$ que pour $c=1$. Cela est certainement dû au fait que les paramètres ω et ρ doivent être, dans le second cas, plus proche des paramètres optimaux que dans le premier cas et que le choix de $\ell_1^{(0)}$ est plus précis dans le second cas.

Bibliographie

1. CEA, J., GLOWINSKI, R., & NEDELEC, J.C., Minimisation de fonctionelles non différentiables. Conferences on Applications of Numérical Analysis (Dundee, March 1971). Lecture Notes in Mathematics N° 128. Berlin Heidelberg New York: Springer 1971.
2. CONCUS, P., Numerical solution of Plateau's problem. Math. Comp. **21**, 340–350 (1967).
3. EKELAND & TEMAM. R., Analyse convexe et problèmes variationnels. Paris: Dunod 1973.
4. GAGLIARDO, E., Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili. Rend. Sem. Mat. Padova **27**, 287–305 (1957).
5. JENKINS, H., & SERRIN, J., The Dirichlet problem for the minimal surface equation in highter dimensions. J. Reine Ang. Math. **229**, 170–187 (1968).
6. LICHNEWSKY, A., Principe du maximum local et solutions généralisées de problèmes du type hypersurfaces minima. Thèse 3ème cycle, Université Paris-Sud, 1973.
7. LIONS, J.L., & MAGENES, E., Problèmes aux limites non homogènes et applications. Paris: Dunod 1968.
8. MIRANDA, M., Boundaries of Caccioppoli sets in the calculus of variations. C.I.M.E. 1972. Geometric measure theory and minimal surfaces. Edizioni Cremonese Roma 1973.

9. NITSCHE, J.C.C., On new results in the theory of minimal surface. Bull. Amer. Math. Soc. **71**, 195–270 (1965).
10. NITSCHE, J.C.C., On the non solvability of Dirichlet's problem for the minimal surface equations. J. Math. Mech. **14**, 779–788 (1965).
11. RAVIART, P.A., Méthode des éléments finis. Cours de 3ème cycle 1971–1972, Université Paris VI, 1973.
12. ROCKAFELLAR, R.T., Duality and stability in extremum problems involving convex functions. PAC. J. Math. **21**, 167–187 (1967).
13. SCHECHTER, Iteration methods for non linear problems. Trans. Amer. Math. Soc. **104**, 179–189 (1962).
14. TEMAM, R., Solutions généralisées de certaines équations du type hypersurfaces minima. Arch. Rational Mech. Analy. **44**, 121–156 (1971).
15. TEMAM, R., On the theory and numerical analysis of the Navier-Stokes equations. Lecture Note. University of Maryland, 1973.
16. VANENDE, Résolution d'un problème de surface minima par une méthode d'éléments finis. Thèse 3ème cycle, Université Paris VI, 1972.

Département de Mathématique
Université de Paris-Sud
Orsay

(Received January 27, 1974)